DS 2

Électromagnétisme statique

Lycée Thiers - Physique-Chimie - MPI/MPI*- 2026-2027

04/11/26

Sujet MPI - Le devoir dure 4h.
La présentation globale de la copie ainsi que l'homogénéité des formules est prise en compte dans la notation.

Problème I - Étude des bobines utilisées dans un couplage inductif non résonant

Ce sujet est extrait de l'épreuve de physique E3A PSI 2020.

Pour établir un couplage inductif non résonant entre une bobine émettrice et une bobine réceptrice, on peut utiliser des solénoïdes ou des bobines « plates » 2D (voir figure 4).



Figure 4 – Bobines utilisées.

Considérons tout d'abord le cas d'un solénoïde de longueur ℓ et d'axe de révolution Oz, comportant N spires circulaires jointives de rayon a, et parcourues par un courant d'intensité variable $i(t)$. On fait l'hypothèse d'être dans le cadre de l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS) : on calcule le champ magnétique créé par des courants variables $i(t)$, comme en magnétostatique par le théorème d'Ampère.

A1. Rappeler les équations locales de Maxwell relatives au champ magnétique $\vec{B}$. Comment se simplifient-elles dans l'ARQS ?

A2. Dans le cadre de l'ARQS, indiquer comment on passe de l'équation locale concernée au théorème d'Ampère.

On suppose dans la suite le solénoïde « infini » et on cherche à exprimer le champ magnétique $\vec{B}$(M) en tout point M de l'espace, repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z). On admet que le champ magnétique est identiquement nul à l'extérieur du solénoïde.

A3. Sous quelle(s) condition(s) l'approximation d'un solénoïde « infini » vous semble-t-elle légitime ?

A4. En invoquant des arguments de symétrie et d'invariance de la distribution de courants, déterminer la direction du champ $\vec{B}$(M), ainsi que la (ou les) coordonnée(s) dont dépend(ent) son module.

A5. En précisant le contour d'Ampère choisi, montrer tout d'abord que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde. En choissant un second contour d'Ampère, déterminer le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde en fonction de ℓ, N et $i(t)$.

Intéressons-nous à présent au cas d'une bobine « plate », constituée (pour simplifier) de N spires circulaires identiques, d'axe de révolution Oz et de rayon a, placées dans le plan $z = 0$ et parcourues par un courant d'intensité $i(t)$. On se place à nouveau dans le cadre de l'ARQS et on considère un point M de l'axe Oz, de cote $z > 0$.

A6. Préciser, en justifiant votre réponse, la direction du champ magnétique $\vec{B}$(M) au point M.

A7. Que dire du plan d'équation $z = 0$ d'un point de vue des courants ? Qu'en déduire d'un point de vue du champ magnétique ? En déduire une relation simple entre $B_z(-z)$ et $B_z(z)$.

On donne l'expression du champ magnétique créé par la bobine « plate » au point M :

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 N i(t)\, a^2}{2\,(z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

A8. Représenter l'allure de la fonction $B_z(z)$. Exprimer le champ magnétique maximal $B_{z,\max}$, et déterminer à quelle distance $z_{1/2}$ de la spire le champ magnétique vaut $B_{z,\max}/2$, en fonction de a.

On donne sur la figure 5 les cartes de champ du solénoïde et de la bobine « plate », simulées à l'aide du logiciel FEMM (*Finite Element Method Magnetics*).

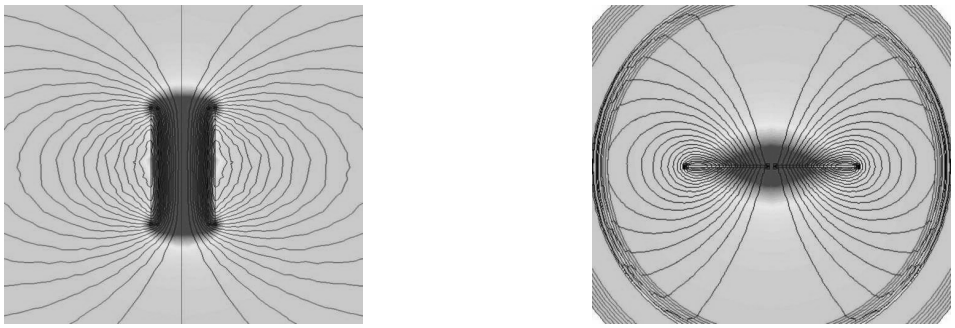


Figure 5 – Cartes de champ du solénoïde (à gauche) et de la bobine « plate » (à droite).

A9. Justifier les symétries et/ou antisymétries observées sur chacune de ces cartes de champ.

A10. Sur la carte de champ du solénoïde, on remarque que les lignes de champ se resserrent au sein du solénoïde et qu'elles y sont approximativement parallèles. Que peut-on déduire de ces observations topologiques ? Quelle propriété, relative au flux du champ $\vec{B}$, permet de le confirmer ?

Problème II - Orage et foudre

D'après l'épreuve de physique-chimie CCP PSI 2015.

L'électrosphère est une couche atmosphérique ionisée. L'électrosphère et la Terre, de rayon $R = 6370\,\text{km}$, forment un gigantesque condensateur terrestre (figure 1a), où le champ électrique par beau temps est dirigé de l'électrosphère vers la Terre et atteint environ $100\,\text{V/m}$–$120\,\text{V/m}$.

Les armatures de ce condensateur sont l'électrosphère et le globe terrestre, entre lesquelles il y a la troposphère et la stratosphère qui constituent le diélectrique, dont l'épaisseur est d'environ $80\,\text{km}$.

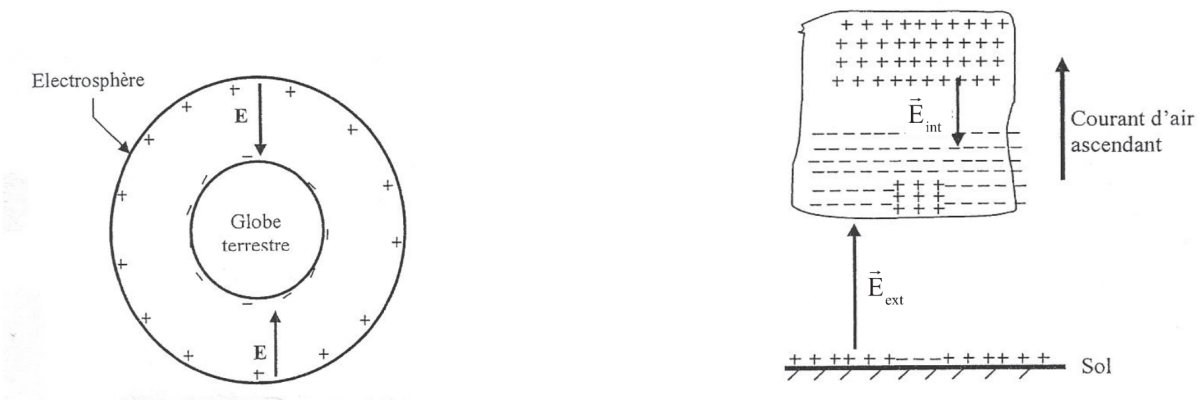
L'air comprend en permanence des charges électriques, positives et négatives, créées par les rayonnements cosmiques ou la radioactivité de la Terre. Par beau temps, il en résulte un courant atmosphérique de densité volumique $\vec{J}$ tendant à décharger le condensateur.

Suite aux perturbations atmosphériques et sous certaines conditions, il se forme des nuages orageux en général du type cumulo-nimbus de couleur sombre. Ils constituent une gigantesque machine thermique dont la base et le sommet sont respectivement à environ $2\,\text{km}$ et $15\,\text{km}$ d'altitude. Sa constitution est rendue possible par l'élévation d'air chaud par des courants ascendants dont la vitesse est de quelques mètres par seconde. Lors de son ascension, cette masse d'air se charge en humidité jusqu'à devenir un nuage. La partie supérieure, où il fait froid, est occupée par les particules de glace, tandis que les gouttes d'eau s'établissent dans la partie inférieure.

Les violents courants ascendants provoquent des collisions entre les gouttes d'eau et les micro-particules de glace, ce qui produit la création de charges électriques par frottement. Ces micro-particules de glace, plus légères et chargées positivement, sont emportées vers le haut par le courant d'air ascendant et occupent ainsi la partie supérieure du nuage qui forme le pôle positif. Tandis que les gouttes d'eau chargées négativement s'établissent dans la partie inférieure et créent le pôle négatif. Cependant, une petite quantité de charges positives demeurent à la base du nuage.

Le nuage fait apparaître sur la Terre, par influence électrique, une charge de signe opposé et crée ainsi deux véritables dipôles électriques (figure 1b) :

- ▷ un dipôle interne, généré entre les pôles positif et négatif du nuage. Si le champ électrique interne $\vec{E}_{\text{int}}$ devient suffisamment grand, il provoque un claquage interne dans le nuage ;
- ▷ un dipôle externe, généré entre la base du nuage et la surface de la Terre. Si le champ électrique externe $\vec{E}_{\text{ext}}$ atteint des conditions critiques de l'ordre de $20\,\text{kV/m}$, il finit par provoquer une grande décharge entre le nuage et la Terre.



(a) Terre et électrosphère.

(b) Répartition des charges dans un nuage d'orage.

Fig. 1 – Modèles électriques de l'atmosphère.

II.1. Étude d'un condensateur sphérique

Un condensateur sphérique à air (figure 2), dont la permittivité diélectrique est assimilable à celle du vide ε_0, est formé de deux armatures concentriques, de rayon R_1 et R_2, avec $R_1 < R_2$.

L'armature intérieure de rayon R_1 porte une charge totale Q uniformément répartie. L'armature extérieure porte la charge totale $-Q$ uniformément répartie.

On travaillera ici dans la base classique des coordonnées sphériques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ et dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS).

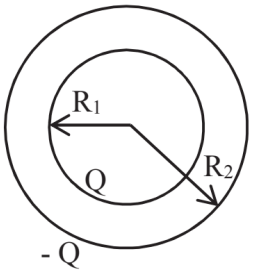


Fig. 2 – Condensateur sphérique

II.1. Par des arguments clairs et précis d'invariance et de symétrie, justifier qu'entre les armatures, le champ électrique est de la forme : $\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_r$.

II.2.a. Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ entre les armatures, en fonction de r, Q et ε_0.

b. En déduire la différence de potentiel $V_1 - V_2$ entre les deux armatures en fonction de Q, R_1, R_2 et ε_0.

c. En déduire l'expression de la capacité de ce condensateur sphérique en fonction de R_1, R_2 et ε_0.

II.3. Le diélectrique n'est pas parfait. Il possède une résistivité électrique certes grande mais finie. Il circule alors un courant de densité volumique $\vec{j}_v$ dans tout l'espace inter-conducteur. Faire un dessin montrant l'allure et le sens des lignes de courant dans le cas où $Q > 0$.

II.2. Analyse du préambule

En vous appuyant sur le texte fourni en préambule, répondre aux cinq questions suivantes :

II.4. Donner une valeur approchée de la capacité du condensateur délimité par l'électrosphère et le globe terrestre.

II.5. Le champ électrique qui règne à la surface de la Terre est-il, en général, dans le même sens ou en sens opposé suivant que le temps est clément ou orageux ?

II.6. Lequel de l'éclair ou de la foudre correspond à un claquage diélectrique interne au nuage ?

II.7. Quel est l'ordre de grandeur de la différence de potentiel entre la Terre et le nuage juste avant l'arrivée de la foudre ?

II.8. Quel est l'ordre de grandeur de l'énergie véhiculée par un coup de foudre de courant $I = 50\,000\,\text{A}$ et d'une durée de 10 ms ? Dans le cadre des énergies renouvelables, vous paraît-il judicieux de vouloir récupérer cette énergie ou non ? Une argumentation de quelques mots est attendue.

II.3. Protection contre la foudre et prise de terre

Il convient de dévier le courant de foudre vers la Terre de façon à ne pas laisser se propager des ondes de tension qui pourraient endommager les appareils électriques des usagers.

Une prise de terre (figure 3) est constituée d'une coque hémisphérique métallique de centre O, de rayon intérieur R_a et de rayon extérieur R_b. On note $\gamma_{\text{mét}}$ la conductivité électrique du métal qui la constitue. Cette prise est enfoncée dans le sol, assimilé au demi espace $z < 0$ et de conductivité électrique γ_{sol}.

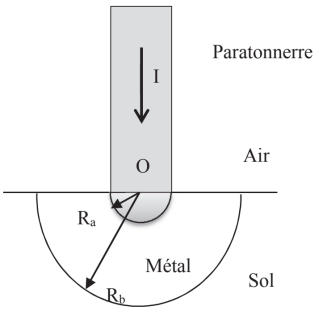


Fig. 3 – Modèle simplifié d'une prise de terre

La prise de terre se décompose ainsi en deux résistances hémisphériques $R_{\text{métal}}$ et R_{sol}, l'une en métal de rayon intérieur R_a et de rayon extérieur R_b, l'autre associée au sol de rayon intérieur R_b et de rayon extérieur infini.

Elle est destinée à recevoir un courant I provenant d'un paratonnerre. Il sera supposé indépendant du temps et descendant.

On suppose que le courant, qui traverse la prise de terre, est radial. Sa densité est de la forme $\vec{j} = j(r)\vec{e}_r$ en coordonnées sphériques.

II.9.a. Rappeler l'unité de la grandeur $j(r)$.

b. Montrer que l'expression de la densité de courant est $j(r) = \dfrac{I}{2\pi r^2}$.

II.10.a. Exprimer alors le champ électrique $E(r)$ régnant dans le sol.

b. En déduire en fonction de I, r et γ_{sol}, l'expression du potentiel électrique $V(r)$ régnant dans le sol. On supposera que $V = 0$ loin du point O.

II.11. Cette répartition non uniforme du potentiel à la surface de la Terre explique le foudroiement indirect des hommes ou des animaux.

On appelle R_h la résistance du corps humain mesurée entre ses deux pieds supposés distants de a.

Pour ne pas être électrocuté (c'est-à-dire pour que son corps ne soit pas traversé par un courant supérieur à une valeur seuil notée $I_{\max}$), un homme doit rester éloigné d'une distance au moins égale à D de la prise de terre.

a. Trouver une relation entre D, a, R_h, I, $I_{\max}$ et γ_{sol}.

b. En supposant $D \gg a$, exprimer D en fonction de a, R_h, I, $I_{\max}$ et γ_{sol}.

c. Application numérique : évaluer D pour $I = 5.0 \times 10^4$ A.

d. Ce phénomène d'électrocution à distance touche-t-il plutôt les grands animaux (vaches, chevaux, ...) ou les petits animaux (lapins, renards, ...) ?

II.12. Expression de la résistance d'une coque hémisphérique

On considère une coque hémisphérique homogène de conductivité électrique γ, comprise entre les rayons R_{int} et R_{ext} et parcourue par un courant radial.

On la décompose en une infinité de coques hémisphériques élémentaires comprises entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$.

a. Exprimer en fonction de γ, r et $\mathrm{d}r$, la résistance élémentaire $\mathrm{d}R_c$ d'une coque hémisphérique élémentaire.

b. En déduire en fonction de γ, R_{int} et R_{ext}, la résistance totale R_c de la coque hémisphérique.

II.13.a. Donner l'expression de la résistance globale, notée R_{glob}, de la prise de terre en fonction de $\gamma_{\text{mét}}$, γ_{sol}, R_a et R_b.

b. Application numérique : évaluer R_{glob} pour $R_a = 1.0\,\text{cm}$, $R_b = 35\,\text{cm}$, $\gamma_{\text{mét}} = 6.0\,\text{S/m}$.

c. La législation en terme de sécurité électrique impose que $R_{\text{glob}} < 25\,\Omega$, est-ce respecté dans le cas de cette prise ? Sinon, que préconisez-vous pour remédier à ce problème ?

Physique du sol et du corps humain

Conductivité électrique du sol : $\gamma_{\text{sol}} = 1.0 \times 10^{-2}\,\text{S/m}$.

Résistance électrique entre deux pieds d'un homme : $R_h = 2.5\,\text{k}\Omega$.

Longueur d'un pas humain : $a = 1.0\,\text{m}$.

Courant d'électrocution d'un être humain : $I_{\max} = 25\,\text{mA}$.

Constantes physiques universelles

Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi\,10^9}\ \text{F m}^{-1}$.

Problème III - Capteur de niveau d'eau

Ce sujet est extrait de l'épreuve de physique CCS TSI 2026.

Rayons de la sonde	$R_1 = 1{,}0 \times 10^{-2}$ m et $R_2 = 3{,}0 \times 10^{-2}$ m
Conductivité électrique de l'air	$\gamma_0 = 1{,}0 \times 10^{-12}\ \text{S} \cdot \text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$
Conductivité électrique de l'eau	$\gamma_{\text{eau}} = 2{,}0 \times 10^{-2}\ \text{S} \cdot \text{m}^{-1}$
Permittivité diélectrique relative de l'eau en régime statique	$\varepsilon_{\text{r}} = 80$

L'alerte à donner en cas d'inondation, notamment de nuit, peut passer par une surveillance automatique du niveau d'eau. On s'intéresse ici à un capteur basé sur une sonde dont les propriétés électriques varient en fonction du niveau d'eau. Cette sonde est insérée dans un circuit électrique oscillant et la variation du niveau d'eau se traduira alors par une variation de la fréquence d'oscillation.

I – Sonde de mesure

La sonde considérée est constituée de deux conducteurs cylindriques coaxiaux d'axe vertical $(\text{O}z)$, de même hauteur H et de rayons R_1 et R_2. La sonde est dans un premier temps supposée vide d'eau (dessin de gauche de la figure 5). Le milieu entre les deux cylindres est l'air de conductivité électrique γ_0 et de permittivité diélectrique ε_0 assimilée à celle du vide. On note $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ la base cylindrique d'axe $(\text{O}z)$.

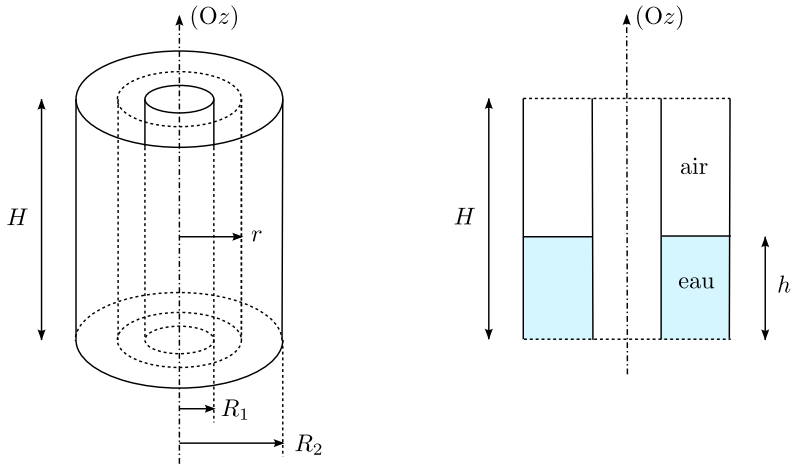


Figure 5 – Sonde de mesure vide d'eau (à gauche) et partiellement remplie d'eau (à droite)

On cherche à déterminer la résistance électrique R_0 et la capacité C_0 entre les deux cylindres.

Afin de déterminer l'expression de la résistance R_0, on suppose qu'un courant permanent d'intensité électrique I circule du cylindre de rayon R_1 vers le cylindre de rayon R_2. En négligeant les effets de bord, le vecteur densité de courant électrique entre les cylindres s'écrit sous la forme $\vec{\jmath} = j(r)\vec{e}_r$ avec r la distance à l'axe (Oz) et $R_1 < r < R_2$. Dans l'eau ou dans l'air, la loi d'Ohm locale s'écrit $\vec{\jmath} = \gamma \vec{E}$ où γ est la conductivité électrique du milieu et $\vec{E}$ et le champ électrique.

Q10. Déterminer $j(r)$ en fonction de I, H et r.

On appelle $U = V_1 - V_2$ la tension électrique entre les deux cylindres où V_1 et V_2 sont les potentiels respectifs des cylindres de rayons R_1 et R_2.

Q11. Montrer que $U = R_0 I$ en identifiant la résistance électrique R_0 en fonction de R_1, R_2, H et γ_0.

Afin de déterminer l'expression de la capacité C_0, on suppose maintenant que les deux cylindres sont chargés et constituent les armatures d'un condensateur. Le cylindre intérieur de rayon R_1 porte une charge $Q > 0$ et le cylindre extérieur porte une charge $-Q$, toutes deux uniformément réparties en surface.

Q12. En négligeant les effets de bord, établir l'expression du champ électrique $\vec{E}$ présent entre les armatures à une distance r de l'axe (Oz), en fonction de Q, H, ε_0 et r.

Q13. Rappeler la définition générale de la capacité C d'un condensateur en lien avec la charge Q portée par l'une de ses armatures, en précisant sur un schéma électrique les conventions choisies.

Q14. Déterminer l'expression de la capacité C_0 en fonction de R_1, R_2, H et ε_0.

On considère maintenant la sonde partiellement remplie d'eau sur une hauteur h (dessin de droite de la figure 5). L'eau a pour conductivité électrique γ_{eau} et pour permittivité diélectrique $\varepsilon_0\,\varepsilon_{\text{r}}$ où ε_{r} est la permittivité diélectrique relative de l'eau. On supposera que h et H sont du même ordre de grandeur.

Q15. Montrer que la résistance électrique entre les deux cylindres s'écrit sous la forme approchée

$$R_{\text{sonde}} = \frac{\ln\left(R_2/R_1\right)}{2\pi\gamma_{\text{eau}}}\,\frac{1}{h}$$

Q16. Montrer que la capacité entre les deux cylindres s'écrit sous la forme approchée

$$C_{\text{sonde}} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{\text{r}}}{\ln\left(R_2/R_1\right)}\,h$$