

Sujet MPI - Le devoir dure 4h.

La présentation globale de la copie ainsi que l'homogénéité des formules est prise en compte dans la notation.

Problème I - Étude d'un diapason

Ce sujet est un extrait du sujet CCINP MP 2022.

Ce problème porte sur l'étude d'un oscillateur mécanique faiblement amorti très utilisé en musique le diapason.

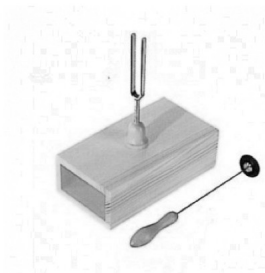


Figure 1 – Gauche : diapason de musicien. Droite : diapason (avec son marteau) muni d'une caisse de résonance pour améliorer l'émission sonore, utilisé dans l'enseignement

Partie I - Étude de la réponse percussionnelle

Les branches du diapason sont décrites comme un oscillateur masse-ressort oscillant selon un axe horizontal, amorti par frottement fluide linéaire en la vitesse.

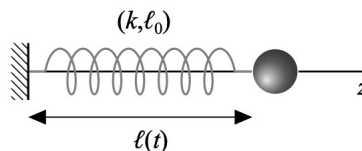


Figure 2 – Modélisation des branches du diapason par un oscillateur masse-ressort horizontal. La coordonnée z repère la position de la masselotte sur l'horizontale

On note m la masse de la masselotte, k la constante de raideur du ressort linéaire équivalent, ℓ_0 sa longueur à vide et $\ell(t)$ sa longueur à l'instant t (voir **figure 2**). De plus, on suppose que la masselotte est soumise à une force $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$.

Q1. Quel phénomène physique la force \vec{f} modélise-t-elle? Justifier par un argument énergétique le signe de la constante λ .

À l'instant $t = 0$, on percute l'une des branches du diapason, ce qui provoque la mise en mouvement de chaque branche. On suppose le choc instantané, c'est-à-dire que les branches pseudo-oscillent librement pour $t > 0$. Une note est alors émise.

- Q2.** On note $z(t) = \ell(t) - \ell_0$ la position de la masselotte. Établir l'équation différentielle dont $z(t)$ est solution pour $t > 0$.
- Q3.** Exprimer la fréquence propre et le facteur de qualité Q de ce système en fonction de k , m et λ .
- Q4.** Sachant que l'on obtient des pseudo-oscillations, établir l'expression littérale de $z(t)$ en fonction de k , m et λ et de constantes d'intégration que l'on ne cherchera pas à déterminer.

La masse de certains diapasons, utilisés par les musiciens, de fréquence propre voisine de 500 Hz vaut 30 g. Pour un diapason sans caisse de résonance, l'émission sonore est détectable à l'oreille pendant environ une trentaine de secondes.

- Q5.** Réaliser une estimation de la constante de raideur du ressort équivalent. De même, réaliser une estimation de la constante de raideur de ressorts utilisés en travaux pratiques. Commenter.
- Q6.** Proposer une estimation du facteur de qualité du diapason. Comparer cette valeur à celle d'un oscillateur masse-ressort de travaux pratiques.
- Q7.** Pour un oscillateur masse-ressort de travaux pratiques, dont la période propre vaut une seconde, indiquer s'il est correct d'affirmer que la durée entre deux maxima successifs de la position de la masselotte vaut effectivement 1,0 s. On s'appuiera sur une discussion numérique à partir d'un développement limité à l'ordre 1 de la pseudo-période en $1/Q^2$.
- Q8.** De même, est-il correct d'affirmer que les branches d'un diapason de fréquence propre f_0 oscillent à la fréquence f_0 après percussion ?

Pour préciser l'estimation précédente du facteur de qualité du diapason, on réalise un enregistrement à l'aide d'un microphone en utilisant un diapason équipé d'une caisse de résonance en bois permettant d'augmenter l'intensité de l'émission sonore (voir schéma du montage, **figure 3**). On obtient les deux enregistrements présentés sur le **document 1**.

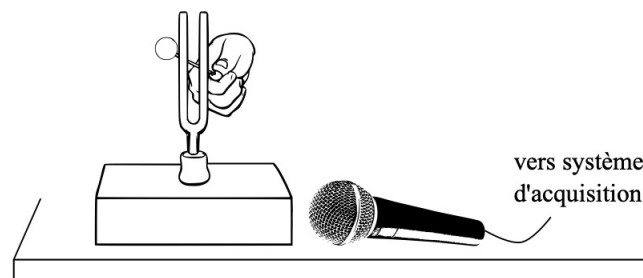
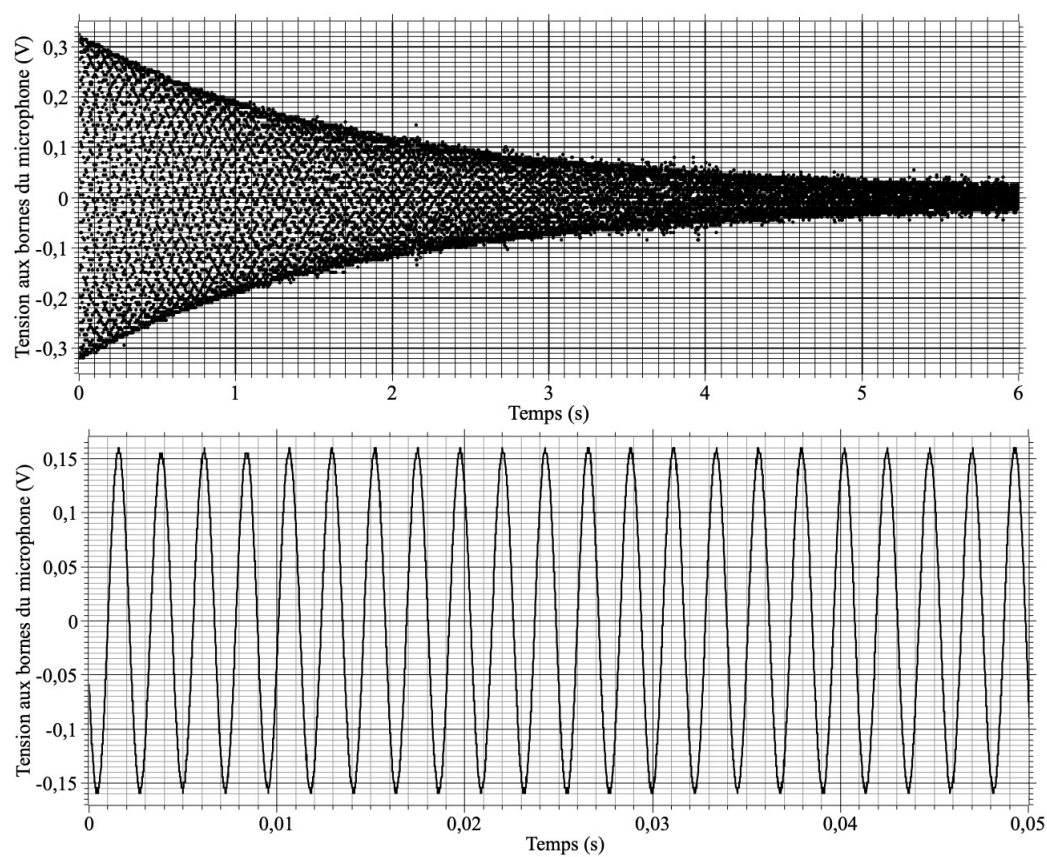


Figure 3 – Schéma du dispositif expérimental étudié dans la question 9

- Q9.** Exploiter le **document 1** pour estimer au mieux la fréquence propre et le facteur de qualité du diapason **A** (on reproduira sommairement la (ou les) figure(s) utilisées pour faire apparaître la méthode graphique employée pour ces déterminations). Comparer la valeur du facteur de qualité mesuré en présence de la caisse de résonance à celui du diapason en son absence. Commenter.

Document 1 - Étude de la réponse percussionnelle

Tension aux bornes d'un microphone enregistrant le son émis par la caisse de résonance du diapason **A** en réponse à une percussion avec le marteau (lors de deux mesures).

Partie II - Génération du champ exciteur

Un solénoïde long (longueur L , rayon R), d'axe Oz , parcouru par un courant d'intensité I et possédant n spires par unité de longueur est utilisé pour générer un champ magnétostatique \vec{B} (voir **figure 4**).

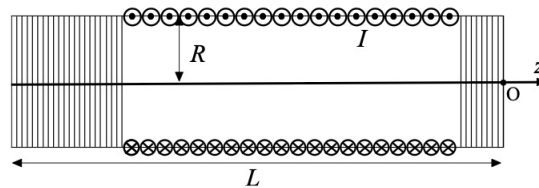


Figure 4 – Schéma du solénoïde

Q10. Dans l'approximation du solénoïde infini, justifier que le champ magnétostatique en tout point M à l'intérieur du solénoïde est de la forme :

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_z$$

où r est la distance de M à la droite Oz et \vec{u}_z le vecteur unitaire dirigeant l'axe Oz dans le sens des z croissants (voir **figure 4**).

Q11. Justifier que le champ magnétostatique est uniforme à l'intérieur du solénoïde infini. Établir son expression en admettant qu'il est nul à l'extérieur.

Q12. Estimer la norme B_0 de ce champ pour un bobinage de $1 \cdot 10^3$ spires·m⁻¹ avec $I = 0,1$ A. Comparer cette valeur à l'ordre de grandeur de la valeur du champ magnétique terrestre.

Q13. Quel est l'intérêt d'avoir supposé le solénoïde infini ? À quelle(s) condition(s) cette approximation est-elle valide ?

On suppose maintenant que le courant $i(t) = I \cos(\omega t)$ parcourant les spires du solénoïde est lentement variable.

Q14. Rappeler et nommer les équations de Maxwell.

Q15. En admettant que l'expression du champ magnétique obtenue à la **question Q11** reste valide à condition de remplacer I par $i(t)$, justifier qu'en tout point M à l'intérieur du solénoïde, le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ est de la forme :

$$\vec{E}(M, t) = E(r, t) \vec{u}_\theta$$

dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ d'axe Oz .

Q16. Montrer que $E(r, t) = E_0(r) \sin(\omega t)$. On précisera l'expression de $E_0(r)$ en fonction de I, μ_0, n, r et ω , puis en fonction de B_0, r et ω .

Problème II - Les besoins en eau du pin maritime (ou pin des Landes)

Ce sujet est extrait de l'épreuve de physique CCINP MPI 2024.

La forêt des Landes de Gascogne est un massif forestier du Sud-Ouest de la France situé en Nouvelle-Aquitaine (**figure 1**). Bordée à l'Ouest par l'océan Atlantique (la Côte d'Argent), elle forme un vaste triangle d'une superficie de plus d'un million d'hectares, qui s'étend sur trois départements (la Gironde, les Landes et le Lot-et-Garonne).

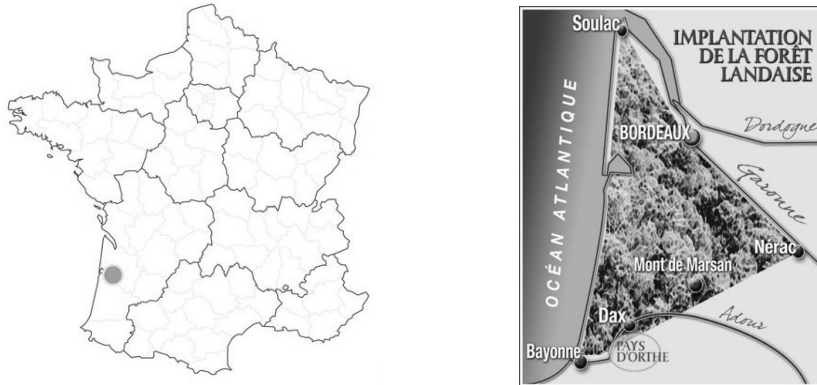


Figure 1 - Position géographique des Landes de Gascogne et de sa forêt
(www.centrecultureldupaysdorthe.com)

Cette forêt a été plantée au XIX^e siècle sous l'impulsion de Napoléon III, dans le but de lutter contre l'avancée des dunes menaçant les villages, d'assécher les marais nombreux dans le territoire et de développer une ressource de matières premières (bois d'œuvre, poteaux télégraphiques, pâte à papier, solvants pour l'industrie chimique...). De nos jours, elle constitue aussi un atout considérable pour le tourisme vert. Hélas, plus de 32 000 hectares de ce précieux massif forestier ont été détruits au cours des gigantesques incendies de l'été 2022.

Mouvements d'eau dans un végétal, potentiel hydrique et analogie électrocinétique

Les végétaux terrestres prélèvent dans le sol l'eau et leurs nutriments qui sont des sels minéraux. Le liquide obtenu constitue la sève brute circulant dans la plante. Pour décrire cette circulation d'eau, les botanistes utilisent le potentiel hydrique, noté ψ . C'est une grandeur homogène à une pression, qui caractérise les états de liaison de l'eau dans les différents milieux et tissus cellulaires constituant le **Continuum Sol-Plante-Atmosphère (CSPA)**. Ce dernier comprend (**figure 2**) :

- le sol,
- le xylème des racines, du tronc et des branches (ensemble des tissus cellulaires organisés en canaux de circulation de la sève brute),
- les stomates des feuilles (cellules de l'épiderme des feuilles régulant l'évapotranspiration),
- l'air de l'atmosphère au contact des feuilles.

Pour de l'eau liquide pure sous $P^{\circ} = 1 \text{ bar}$ (état de référence), le potentiel hydrique ψ est nul par convention. Il est négatif dans le CSPA (**figure 2**) car l'eau y est en interaction avec les tissus cellulaires. L'évapotranspiration au niveau des feuilles, provoquée par le rayonnement solaire, crée un appel d'eau vers l'atmosphère. Des gradients de potentiel hydrique apparaissent alors le long du CSPA, accompagnés de flux d'eau dans le sens des potentiels hydriques décroissants. Ces flux sont régis par la loi de Darcy : $\vec{j}_M = -\frac{K}{\rho_e g} \overline{\text{grad}} \psi$ où \vec{j}_M désigne le vecteur densité volumique

de courant de masse en eau, K la perméabilité hydraulique du milieu, ρ_e la masse volumique de l'eau et g l'accélération de la pesanteur. Cette circulation de masse d'eau dans le CSPA présente donc des analogies avec la circulation de charges électriques dans un milieu conducteur ohmique.

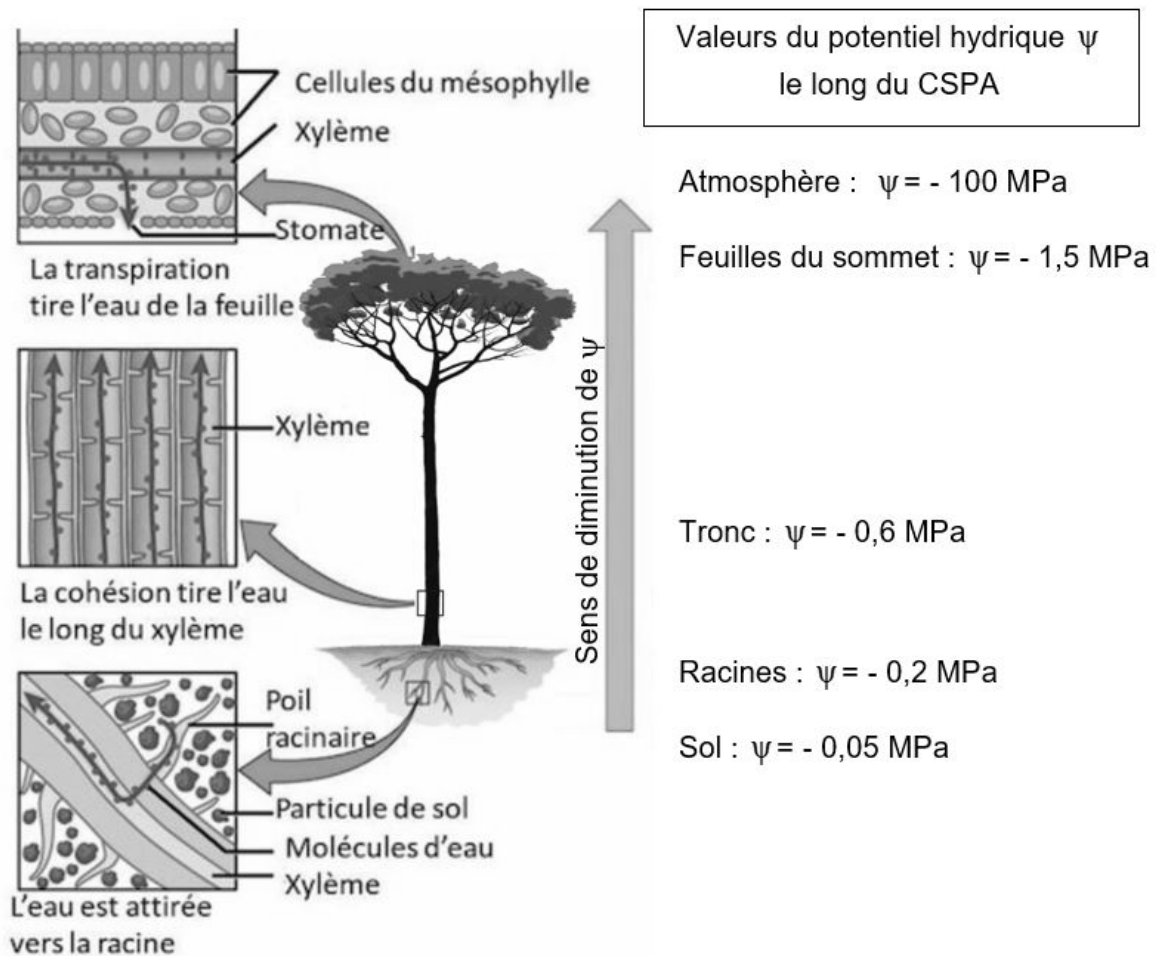


Figure 2 - Potentiel hydrique le long du CSPA

(www.encyclopedie-environnement.org/vivant/quete-de-eau-par-les-plantes)

- Q1. a)** Rappeler la loi d'Ohm locale dans un milieu ohmique (on l'écrira à l'aide du potentiel électrique V). À quelles grandeurs électriques sont analogues respectivement ψ et \vec{j}_M ? Définir et exprimer, en fonction des données, la conductivité hydraulique γ , analogue de la conductivité électrique.
- b)** Dans ce modèle, la masse d'eau traversant une surface (S) par unité de temps, ou débit massique à travers (S), est $D = \iint_{(S)} \vec{j}_M \cdot \vec{dS}$. De quelle grandeur électrique le débit massique D est-il l'analogie ?
- Q2. a)** Définir la résistance hydraulique R_H d'un tube de courant d'eau de débit massique D , d'extrémités A et B, soumis à une différence de potentiel hydrique $\psi_A - \psi_B > 0$.
- b)** Dans quelle unité faisant intervenir uniquement le mètre et la seconde, s'exprime la résistance hydraulique ?

Le système racinaire du pin est modélisé comme un faisceau de N racines cylindriques rectilignes de conductivité hydraulique γ_r , de section s_r et de longueur l_r , interconnectées au point O à la base du tronc (**figure 3**) et soumises à la même différence de potentiel hydrique $\psi_S - \psi_O > 0$, avec ψ_S le potentiel hydrique au niveau des extrémités des racines au contact avec le sol.

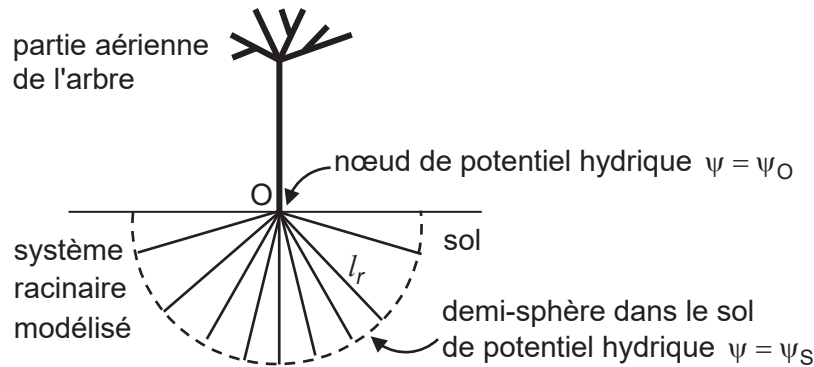


Figure 3 - Schéma d'un pin et de son système racinaire

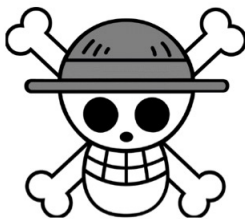
- Q3.** Par circulation du champ $-\overline{\text{grad}}\psi$ le long d'une racine, établir l'expression de la résistance hydraulique R_r d'une racine en fonction de γ_r , s_r et de l_r . En déduire la résistance hydraulique R_N du système racinaire.
- Q4.** Avec R_N la résistance hydraulique du système racinaire, R_t celle du tronc, R_f celle du système foliaire et R_a celle à l'interface entre le système foliaire et l'atmosphère, donner en justifiant, le schéma électrique équivalent au système racines-tronc-feuilles-atmosphère.

La résistance hydraulique moyenne d'un pin adulte (des extrémités des racines au contact avec le sol jusqu'aux aiguilles à son sommet) est $R_p = 1,0 \cdot 10^9$ S.I.

- Q5.** À partir de R_p et des valeurs du potentiel hydrique de la **figure 2**, donner la valeur numérique de R_a .
- Q6.** En déduire la masse évapo-transpirée par un pin adulte pendant un jour d'été (avec les valeurs numériques de la **figure 2** et une durée d'exposition solaire journalière de 12 h).
- Q7.** On peut lire sur un document du C.N.P.F. (Centre National de la Protection Forestière) "qu'un hectare de pins maritimes adultes aspire 15 à 25 tonnes d'eau par jour, cette eau étant évapo-transpirée par la partie aérienne de l'arbre". Sachant qu'il y a typiquement 300 pins adultes par hectare, les valeurs du C.N.P.F. sont-elles en accord avec le résultat trouvé en **Q6** ? On rappelle que 1 hectare = 10^4 m^2 .

Problème III - Kami no Sabaki – Électrodynamique classique

Ce sujet est un extrait du sujet CCINP MP 2023.



One Piece est une série de mangas Shōnen créée par Eiichirō Oda.

L'histoire suit les aventures de Monkey D. Luffy, un garçon dont le corps a acquis les propriétés du *caoutchouc* après avoir mangé par inadvertance un *fruit du démon*.

Avec son équipage de pirates, appelé l'équipage au *Chapeau de paille*, Luffy explore *Grand Line* à la recherche du trésor ultime connu sous le nom de *One Piece* afin de devenir le prochain *roi des pirates*.

Ce sujet aborde diverses questions de physique très librement inspirées de cette œuvre.



Enel (Eneru en VO) est l'antagoniste principal de l'Arc *Skypiea*. Son fruit du démon, le *goro goro no mi*, lui permet de produire de la foudre et du courant électrique en maîtrisant la formation de particules chargées....

II. 1 - Champs électromagnétiques dans un condensateur

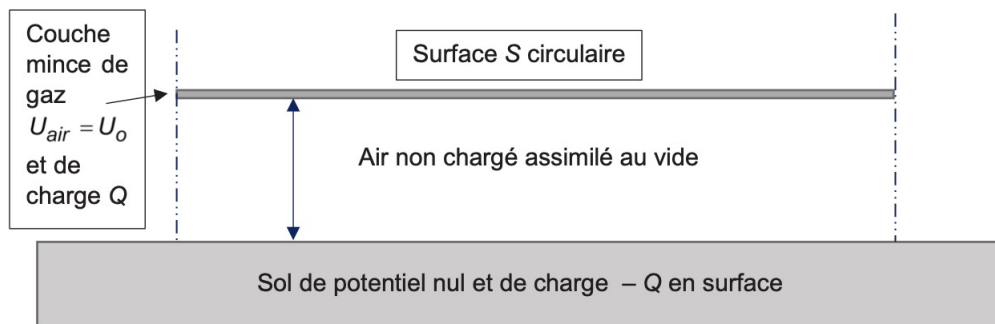


Figure 3 - Condensateur créé par Enel

Les échelles ne sont pas respectées par souci de représentation.

Le pouvoir d'*Enel* lui permet d'imposer un potentiel à un volume d'air extrêmement fin au-dessus de lui. On s'intéresse ici au condensateur formé par cette surface d'air circulaire et le sol, localement plan (**figure 3**).

Dans cette modélisation, on pourra considérer deux disques (plans) parallèles de surfaces S distants de d avec $d \ll \sqrt{S}$ de potentiels électriques respectifs $U_{sol} = 0$ et U_{air} (U_{air} potentiel électrique de la couche d'air chargé). On négligera les effets de bord. On appellera (Oz) l'axe vertical ascendant dont l'origine est prise au sol et \vec{u}_z son vecteur unitaire.

On assimile l'air non chargé entre ces plaques au vide de permittivité $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

On se place ici en régime statique, $U_{air} = U_0 = \text{constante positive}$ et on note $\sigma_{air} = \sigma_0$ la densité surfacique des charges électriques de la surface d'air chargée.

Q24. Justifier que le champ électrique est de direction Oz : $\vec{E} = E\vec{u}_z$. Exprimer ce champ électrique créé dans l'espace $0 < z < d$ en fonction de σ_0 et de ϵ_0 .

Q25. En déduire la différence de potentiel U_0 en fonction de σ_0, ϵ_0 et de d .

Q26. Calculer E et σ_0 pour $d = 5,0 \text{ m}$ et $U_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ V}$.

Q27. Doit-on craindre une telle tension ? On donne la valeur du champ disruptif de l'air dans les conditions d'étude : $E_{disruptif}(\text{air}) = 3,6 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

Le condensateur est soumis désormais à une tension alternative de basse fréquence f , de telle sorte que $U_{air} = U_0 \cos(\omega t)$. On travaillera en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) . On admet qu'à cette fréquence, la relation entre le champ électrique \vec{E} et le potentiel électrique est la même qu'en régime statique.

- Q28.** Écrire \vec{E} sous la forme $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ avec E_0 à préciser en fonction de U_0 et des autres données de l'énoncé.
- Q29.** Rappeler les équations de Maxwell du champ électromagnétique.
- Q30.** Justifier l'existence d'un champ magnétique \vec{B} et montrer que $\overline{B(M,t)} = B(r,z,t) \vec{e}_\theta$.
- Q31.** Justifier que, si l'on reste dans l'espace entre les armatures, la circulation du champ magnétique le long d'un contour orienté s'écrit : $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi_{\vec{E}}}{dt}$, avec c et $\Phi_{\vec{E}}$ à préciser.

II. 2 - Écrantage dans un plasma thermique

En fait, la création d'un tel potentiel électrique augmente drastiquement la température, ionisant au passage l'atmosphère. L'air ne sera plus assimilé à du vide mais à un plasma, un milieu globalement neutre électriquement, partiellement ou totalement ionisé, contenant en moyenne et par unité de volume, n_e électrons libres de masse m_e et de charge $q_e = -e$ et $n_i = n_e$ ions X^+ , de masse m_i et n_o atomes X de masse m_o .

L'atmosphère est à l'équilibre thermodynamique à une *haute* température T .

Intéressons-nous à l'environnement d'un ion X^+ particulier dont la position sera prise pour l'origine O . Notons respectivement n_+ et n_- , les densités volumiques d'ions et d'électrons en un point M situé à une distance r de l'origine. On se place dans le cadre de l'électrostatique.

On admet les relations :

$$n_+ = n_e \left(1 - \frac{eU}{k_B T} \right)$$

$$n_- = n_e \left(1 + \frac{eU}{k_B T} \right)$$

- Q36.** Comment s'écrit, dans ce milieu, l'équation de Poisson ? En déduire l'équation différentielle à laquelle obéit $U(r)$.

- Q37.** En posant $Z(r) = rU(r)$, montrer que la fonction $Z(r)$ vérifie l'équation : $\frac{d^2 Z}{dr^2} - \frac{Z}{\lambda_D^2} = 0$ avec λ_D une constante à exprimer en fonction des données de l'énoncé.

- Q38.** Résoudre cette équation et montrer que le potentiel électrique s'écrit :

$$\text{pour } r \neq 0, U(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\lambda_D}.$$

Interpréter ce que représente λ_D . Commenter.

Q39. En déduire la densité volumique de charge $\rho(r)$ ainsi que la charge $Q(r)$ contenue dans une sphère de centre O et de rayon r .

$$\text{On donne } \int_0^r r \exp\left(-\frac{x}{\lambda_D}\right) dx = \left[1 - \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right)\left(\frac{r}{\lambda_D} + 1\right)\right].$$

II. 3 - Décharge du condensateur de plasma

On (re)considère deux disques (plans) parallèles de surface S distants de d avec $d \ll \sqrt{S}$ de charges surfaciques électriques respectives $\sigma_{air} = \sigma_0$ (pour la surface d'air chargée) et $\sigma_{sol} = -\sigma_0$ (au sol). On négligera les effets de bord. On appellera (Oz) l'axe vertical ascendant dont l'origine est prise au sol et \vec{u}_z son vecteur unitaire.

À l'instant initial ($t = 0$), suite à l'élévation brutale de température, l'air contenu entre ces deux plans devient un conducteur ohmique, caractérisé par sa conductivité électrique γ . Cet air, entre les plaques, est supposé rester localement neutre. La relation entre le champ électrique \vec{E} et le potentiel électrique est supposée être la même qu'en régime statique.

Q40. Quelle est l'unité (ou la dimension) de γ ?

Q41. Déterminer la densité volumique de courant \vec{j} en fonction de $\sigma_{air}(t)$ et des données de l'énoncé.

Q42. Montrer que l'équation différentielle relative à la densité surfacique de charge d'air s'écrit : $\frac{d\sigma_{air}}{dt} + \frac{\sigma_{air}}{\tau} = 0$, avec τ une constante de temps à exprimer en fonction des données de l'énoncé.

Q43. Représenter $[t \mapsto \sigma_{air}(t)]$ en faisant apparaître σ_0 et τ .

Q44. Calculer le temps caractéristique de décharge τ ainsi que la densité de courant arrivant au sol à l'instant initial pour $\gamma = 1,0 \cdot 10^{20}$ USI et $\sigma_0 = 1,0 \cdot 10^8$ C · m⁻².

Grâce au fulguro-fruit, Enel peut rendre l'air conducteur et faire propager un courant électrique d'intensité gigantesque, le rendant tout puissant face à tout élément conducteur...

Formulaire

Développement de Taylor

Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $x_0 \in I$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $n \in \mathbb{N}$.

Si f est de classe \mathcal{C}^n sur I , $\forall h \in \mathbb{R}, (x_0 + h) \in I$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x_0} + \frac{h^3}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{x=x_0} + \dots + \frac{h^n}{n!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x_0} + o(h^n)$$

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} \left. \frac{d^k f}{dx^k} \right|_{x=x_0} + o(h^n).$$

Trigonométrie

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2(a) = 2 \cos^2(a) - 1$$

Analyse vectorielle

- $\operatorname{div}(\overline{\operatorname{grad}}) = \Delta$

- Coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Théorème de Stokes - Ampère

Pour un champ de vecteur \overline{A} de classe suffisante, le théorème de Stokes-Ampère s'écrit :

$$\oint_C \overline{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_S \operatorname{rot}(\overline{A}) \cdot d\vec{S} \text{ avec } C \text{ une courbe fermée bordant la surface à travers laquelle on calcule}$$

le flux de $\operatorname{rot}(\overline{A})$. L'orientation du contour C donne l'orientation du vecteur $d\vec{S}$.