

Sujet MPI* - Le devoir dure 4h.

La présentation globale de la copie ainsi que l'homogénéité des formules est prise en compte dans la notation.

Problème I - Caractéristique d'une diode à vide

Ce sujet est extrait de l'épreuve de physique-chimie CCS 2 MPI 2025.

Ce sujet a trait aux tubes à vide (figure 1a), longtemps utilisés pour construire des équipements électriques avant l'apparition des composants à base de matériaux semi-conducteurs. Les ordinateurs de la première génération des ordinateurs modernes étaient construits avec des tubes (environ 19 000 pour l'ENIAC!). De nos jours, les tubes à vide sont encore utilisés dans certains équipements audio (figure 1b) et pour certaines applications de forte puissance. Les principaux inconvénients des tubes à vide sont leur encombrement, leur fragilité et la nécessité d'une tension d'alimentation élevée (quelques centaines de volts).

Aucune connaissance préalable sur les tubes à vide n'est requise pour traiter le questionnement.



(a) Le tube ECC83.
Source : Wikipédia.



(b) Amplificateur audio à tubes.
Source : catalogue Auna.

Figure 1 – Tubes à vide.

Les tubes à vide sont classés selon le nombre d'électrodes qu'ils possèdent : diode (2 électrodes), triode (3 électrodes), tétrade (4 électrodes) et penthode (5 électrodes). La triode ECC83 (voir figure 1a) est le composant étudié dans ce sujet.

La figure 2 montre la constitution simplifiée d'une triode et le symbole électrique associé. Les électrodes de la triode s'appellent la cathode, l'anode et la grille. De plus, un filament dans lequel circule un courant continu chauffe la cathode. La présence de ce filament fait que ce tube est souvent nommé improprement *lampe*.

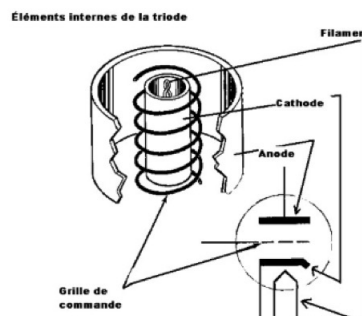


Figure 2 – Lien entre constitution et symbole électrique.
Source : Wikipédia.

Dans le tube de référence ECC83, la cathode est cylindrique de rayon $r_1 = 2,0$ mm et l'anode cylindrique de rayon $r_2 = 5,0$ mm. Elles sont coaxiales, d'axe (Oz), et toutes deux de hauteur $H = 45$ mm. L'ensemble est enfermé dans une enveloppe de verre et sous vide hors fonctionnement.

Dans cette première partie, la grille est ignorée. La triode ne fonctionne qu'avec sa cathode et son anode : il s'agit donc d'une diode. La cathode, chauffée par le filament (étudié partie B), est le siège d'une émission d'électrons appelée émission thermoionique. **Par hypothèse, ces électrons ne possèdent pas de vitesse initiale et leur nombre dépend de la température T de la cathode.** L'anode est portée au potentiel $V_a > 0$ par rapport à la cathode de potentiel nul par choix ($V_c = 0$). Sous l'influence du champ électrique régnant entre cathode et anode, les électrons peuvent rejoindre l'anode et ainsi créer un courant électrique I_a circulant depuis l'anode vers la cathode.

Dans cette section, on cherche, **en régime stationnaire**, la caractéristique $I_a(U_{ac})$ de la diode à vide, dont le symbole électrique est rappelé à la figure 3. I_a représente le courant anodique, fléché (positif) entrant par l'anode (et donc sortant par la cathode) et U_{ac} est la tension anode - cathode.

On note ρ la densité volumique de charge électrique, *a priori* non uniforme, régnant dans l'espace entre anode et cathode et V le potentiel électrostatique. On se place en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , l'axe (Oz) étant confondu avec l'axe des cylindres anodique et cathodique.

- Q1.** Rappeler les équations de Maxwell en régime stationnaire. Justifier l'existence du potentiel électrostatique V et établir la relation qui lie V à ρ . Donner le nom de cette relation.

Les effets de bord sont négligés et on considère que le potentiel V admet pour dépendance spatiale uniquement la coordonnée radiale r .

- Q2.** Proposer des éléments de justification de ces choix.
- Q3.** Évaluer, en ordre de grandeur, le poids d'un électron et la force électrostatique subie par un électron circulant depuis la cathode vers l'anode. Conclure.
- Q4.** Traduire la conservation de l'énergie mécanique d'un électron circulant depuis la cathode vers l'anode pour en déduire la vitesse $v(r)$ d'un électron à la distance r de l'axe en fonction, notamment, du potentiel électrique $V(r)$.
- Q5.** Rappeler l'équation locale de conservation de la charge en régime quelconque. En déduire, pour le régime stationnaire d'étude, une propriété vérifiée par le vecteur densité de courant électrique \vec{j} . Établir la relation qui existe en conséquence entre r , H , $\rho(r)$, $v(r)$ et le courant électrique anodique I_a .
- Q6.** À l'aide des relations précédentes, montrer que le potentiel V est solution de la relation suivante en précisant l'expression du facteur k :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) = k V^{-\frac{1}{2}}$$

- Q7.** Vérifier la cohérence de l'unité du facteur k .

L'équation différentielle obtenue à la question **Q6** ne possède pas de solution analytique simple vérifiant les conditions aux limites imposées ici. Seule une solution approchée est recherchée dans le cadre de ce sujet.

- Q8.** Déterminer par quels facteurs sont multipliés ρ , v et I_a si le potentiel de l'anode V_a est multiplié par un facteur N .

Le résultat précédent et la forme du second membre de l'équation différentielle suggèrent une solution pour cette dernière sous la forme d'une loi puissance de type $V(r) = \alpha r^n$.

- Q9.** Déterminer le système d'équations dont α et n sont solutions. En déduire la valeur de n et l'expression de α en fonction de k .

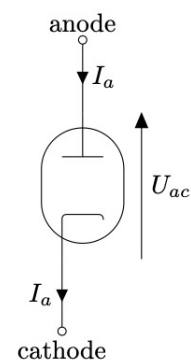


Figure 3 – Diode à vide : symbole et fléchage des grandeurs électriques associées.

La forme de la solution utilisée ne permet pas de vérifier la condition imposée à la cathode : $V(r = r_1) = 0$. On choisit d'adopter pour la suite la solution approchée $V(r) = \alpha(r - r_1)^n$ qui vérifie cette condition, tout en conservant les expressions précédentes des constantes α et n .

Q10. Exprimer $U_{ac} = V(r_2) - V(r_1)$ en fonction de I_a et des autres paramètres utiles. En déduire que la relation caractéristique de la diode $I_a(U_{ac})$ s'écrit $I_a(U_{ac}) = \beta U_{ac}^{\frac{3}{2}}$ et préciser l'expression de β en fonction de ε_0 , H , r_1 , r_2 , e et m . Déterminer la valeur numérique de β .

Q11. Expliquer pourquoi le résultat précédent n'est pas valable dans le cas $U_{ac} < 0$. Préciser ce qu'il se passe dans ce cas et indiquer la valeur de I_a correspondante.

Q12. Tracer la caractéristique $I_a(U_{ac})$.

On appelle « polariser une diode » l'action de choisir un point de fonctionnement pour celle-ci, c'est-à-dire choisir un couple de valeurs (I_a, U_{ac}) que l'on note (I_a^0, U_{ac}^0) . Pour le tube ECC83, le point de fonctionnement optimal préconisé par le constructeur correspond à l'intensité $I_a = I_a^0 = 1,2$ mA.

Q13. Déterminer la valeur U_{ac}^0 telle que $I_a^0 = 1,2$ mA.

Données et formulaire

Données numériques

Charge élémentaire	$e = 1,6 \times 10^{-19}$ C
Masse de l'électron	$m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8,8 \times 10^{-12}$ F · m ⁻¹
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,4 \times 10^{-23}$ J · K ⁻¹
Constante de Planck	$h = 6,6 \times 10^{-34}$ J · s
Constante de Stefan	$\sigma = 5,7 \times 10^{-8}$ W · m ⁻² · K ⁻⁴
Conductivité électrique du tungstène	$\gamma = 8,9 \times 10^6$ S · m ⁻¹
Masse volumique du tungstène	$\mu_W = 1,9 \times 10^4$ kg · m ⁻³
Conductivité thermique du tungstène	$\lambda = 1,7 \times 10^2$ W · m ⁻¹ · K ⁻¹
Capacité thermique massique du tungstène	$c = 1,3 \times 10^2$ J · kg ⁻¹ · K ⁻¹

Formulaire

- Loi de Wien : $\lambda_{\max} T = 2,9$ mm · K.
- Pour un champ scalaire a , $\text{rot}(\overrightarrow{\text{grad}} a) = \vec{0}$.
- Pour un champ scalaire a , $\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} a) = \Delta a$.
- Pour un champ scalaire a , à dépendance spatiale uniquement radiale en coordonnées cylindriques :

$$\Delta a(r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} a(r) \right).$$

Problème I - Fonctions spéciales

Il s'agit d'un extrait du concours Mines-Pont 2023 filière MP et MPI.

I La fonction de W de LAMBERT

I.A Tir d'un projectile sans frottements

Un projectile assimilé à un point matériel de masse m est lancé à partir du sol en O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 \in (O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et faisant un angle θ_0 avec l'horizontale dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

- – 1. Rappeler la définition d'un référentiel galiléen. Dans quelle mesure le référentiel terrestre peut-il être supposé galiléen ?
- – 2. Établir les équations horaires du mouvement.
Montrer que le mouvement est plan.
- – 3. Établir l'équation de la trajectoire. Quelle est la forme de la trajectoire ? Est-elle symétrique ?
- – 4. Déterminer les coordonnées du sommet S de la trajectoire. Définir la portée ℓ du tir et établir son expression. Quel est l'angle θ_0 assurant un tir de portée maximale ?

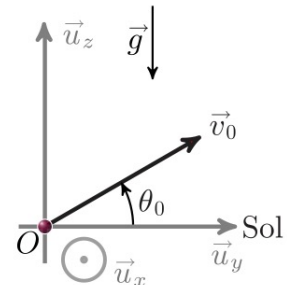


FIGURE 1 – Tir d'un projectile

I.B Tir d'un projectile avec frottements

On considère maintenant que le projectile est soumis à une force de frottements proportionnelle à la vitesse : $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ avec $\alpha > 0$.

- – 5. Quelle est la dimension du coefficient α ? Définir à partir de α un temps caractéristique τ . Le mouvement reste-t-il plan ?
- – 6. Établir, en fonction g , τ , $v_0 = \|\vec{v}_0\|$, θ_0 et t , les nouvelles équations horaires du mouvement.
- – 7. Dans la situation où $t \ll \tau$, simplifier les équations horaires de la trajectoire et donner l'allure du mouvement.
- – 8. Dans la situation où $t \gg \tau$, simplifier les équations horaires du mouvement en faisant apparaître une vitesse limite v_∞ .
Où retombe le projectile ?
- – 9. Dédire des résultats précédents, l'allure globale de la trajectoire dans une situation où le temps de vol est grand devant τ , en séparant la trajectoire en trois phases.
- – 10. Tracer l'allure de la trajectoire pour un temps de vol de l'ordre de τ .

I.C La portée maximale d'un tir avec frottement

- – 11. Dresser le tableau de variation de la fonction $T : \chi \mapsto T(\chi) = \chi e^\chi$ et déterminer la valeur β de son minimum global.

La fonction W de LAMBERT est définie comme étant la fonction réciproque de T sur $[\beta, +\infty[$. Reproduire le graphe de T représenté sur la partie gauche de la figure 2 et expliquer comment en déduire l'allure de W représenté sur la partie droite.

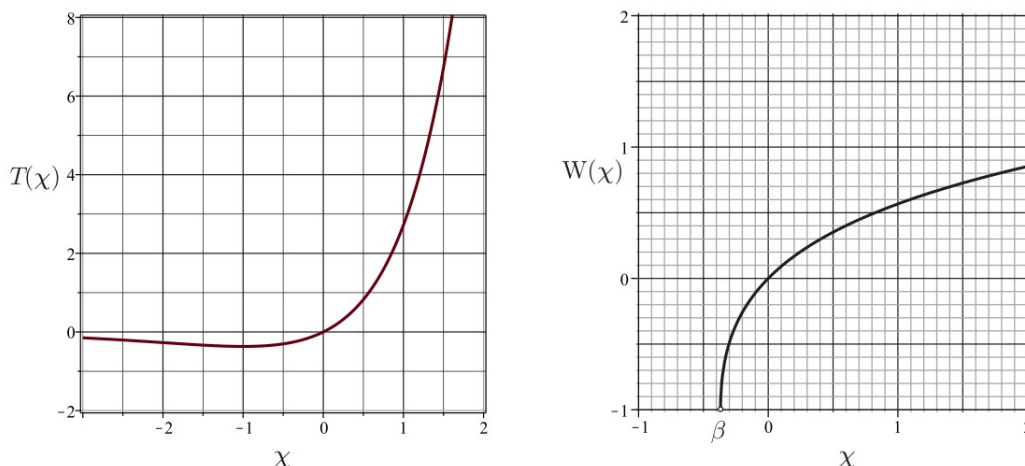


FIGURE 2 – Représentations graphiques de $T(\chi)$ (à gauche) et $W(\chi)$ (à droite)

- – 12. On peut montrer que : $(\chi + \exp[W(\chi)]) W'(\chi) = 1$. Quelle est la valeur de $W(0)$?

On souhaite appliquer le schéma d'EULER explicite avec un pas $h = 0.0001$ pour résoudre cette équation différentielle. Donner le code python permettant d'obtenir une représentation graphique de $W(\chi)$ sur l'intervalle $[0; 2,5]$.

La fonction $W(\chi)$ est implémentée dans `scipy`. On peut l'appeler avec : `from scipy.special import lambertw`.

On montre que si $ad \neq 0$, la solution de l'équation $at + b + ce^{dt} = 0$ pour l'inconnue t est donnée par l'expression

$$t = -\frac{b}{a} - \frac{1}{d} W\left(\frac{cd}{a} \exp\left(-\frac{bd}{a}\right)\right).$$

- – 13. En déduire à quel instant $t^* > 0$ le projectile touche le sol. On posera $u = -\left(1 + \frac{v_0 \sin \theta_0}{g\tau}\right)$.

- – 14. On rappelle que par définition $W \exp(W) = \text{Id}$ où Id est la fonction identité : $\chi \mapsto \chi$.

En déduire que la portée est donnée par $\ell = \tau v_0 \cos \theta_0 (1 - W(ue^u)/u)$.

En posant $\gamma = v_0/v_\infty$, on montre que l'angle initial donnant la portée maximale est :

$$\theta_{\max} = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{\gamma W\left(\frac{\gamma^2 - 1}{e}\right)}{\gamma^2 - 1 - W\left(\frac{\gamma^2 - 1}{e}\right)}\right) & \text{si } \gamma \neq 1 \\ \arcsin\left(\frac{1}{e-1}\right) \simeq 35,6^\circ & \text{si } \gamma = 1 \end{cases}$$

- – 15. À l'aide de la figure 2, déterminer la valeur numérique de l'angle assurant la portée maximale pour $v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $\tau = 0,4 \text{ s}$.

II L'intégrale elliptique de première espèce

Dans toute cette partie on néglige les frottements de l'air.

On étudie un pendule simple constitué d'une masse ponctuelle m et d'une tige rigide de longueur ℓ et de masse négligeable, astreint à évoluer dans un plan vertical $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$.

On repère sa position par l'angle $\theta(t)$. À $t = 0$ on lâche le pendule sans vitesse initiale avec $\theta(t = 0) = \theta_0 \in]0, \pi/2[$.

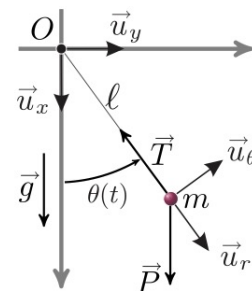


FIGURE 3 – Pendule simple

□ – 16. Établir l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la fonction $\theta(t)$.

□ – 17. On fait l'approximation des petits angles tels que $\sin \theta \sim \theta$. Établir dans ces conditions la période T_0 des oscillations.

□ – 18. Déterminer l'expression générale de $\frac{d\theta}{dt}$ sans faire l'approximation des petits angles. En déduire que la période T des oscillations du pendule est donnée par :

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_0)}}.$$

En effectuant le changement de variable $\sin \frac{\theta}{2} = \sin \phi \sin \frac{\theta_0}{2}$, on montre que :

$$T = \frac{2T_0}{\pi} \mathcal{K} \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right) \quad \text{avec} \quad \mathcal{K}(\chi) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \chi \sin^2 \phi}}.$$

On souhaite calculer l'intégrale $\mathcal{K}(\chi)$ par la méthode des rectangles médians pour un angle $\theta_0 = \pi/3$.

□ – 19. Après avoir tracé le graphe de la fonction $\chi \mapsto 1 + \sqrt{\chi}$ pour $\chi \in [0; 9]$, illustrer le principe de la méthode des rectangles médians pour calculer le réel $I = \int_0^9 (\sqrt{\chi} + 1) d\chi$ en utilisant 9 rectangles.

Si on double le nombre de rectangles utilisés qu'en est-il de la différence entre la valeur exacte de I et la valeur approchée numériquement par la méthode des rectangles médians ?

□ – 20. Recopier et compléter le code suivant permettant de calculer $\mathcal{K}(\chi)$ par la méthode des rectangles médians.

```

1  import math as m
2  def f(x,phi):
3      return.....
4
5  S = 0.
6  N = 100
7  a = 0.
8  b = m.pi/2.
9  pas = .....
10 theta_0 = m.pi/3.
11 x = m.sin(theta_0)**2
12 for i in range(N):
13     phi = .....
14     S = .....
15
16 print(pas * S)
python code

```

La fonction $\chi \mapsto \mathcal{K}(\chi)$ est nommée intégrale elliptique complète de première espèce. La commande `from scipy.special import ellipk` permet de l'appeler directement dans `scipy`.

- – 21. En utilisant la figure 4, pour un pendule tel que $T_0 = 1$ s, évaluer T lorsque $\theta_0 = 50^\circ$. Quel est le décalage temporel induit par la prise en compte de l'approximation des petits angles si l'on envisage de mesurer une heure ?

Au XVII^e siècle les puissances maritimes désiraient posséder des instruments précis pour la mesure du temps afin de faciliter la navigation (notamment pour déterminer la longitude). Les rois de FRANCE et d'ANGLETERRE avaient offert des prix importants à qui serait capable de réaliser un chronomètre précis, fiable et utilisable en mer.

Christiaan HUYGENS (1629-1695) motivé par ce problème étudia le pendule conique et le pendule oscillant entre deux lames courbes. Il parvint à démontrer que des lames en forme de cycloïde assurent l'isochronisme rigoureux des oscillations.

- – 22. Dans quelle situation courante rencontre-t-on la cycloïde ?

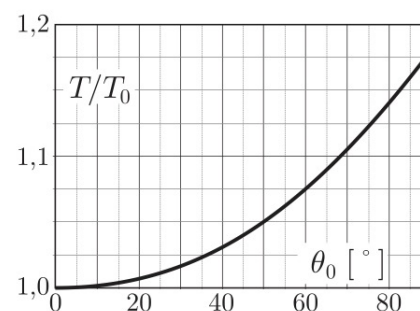


FIGURE 4 – $\theta_0 \mapsto T(\theta_0)/T_0$

Problème II - Mesure de l'inclinaison de la bouée Waverider

Ce sujet est extrait du concours CCS MP 2022.

UN DOCUMENT RÉPONSE EST EN FIN DE SUJET - À RENDRE AVEC LA COPIE

Afin de déterminer la direction des vagues, certains Waveriders sont équipés de deux autres accéléromètres, non pas placés sur la plateforme comme le premier, mais *rigidement liés à la bouée*. Lorsque la bouée s'incline sous l'effet de la houle, ces accéléromètres s'inclinent donc aussi. Afin de projeter dans le plan horizontal et sur l'axe vertical les accélérations qu'ils mesurent, il faut déterminer leur orientation relativement à la base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ définie par la plateforme et son fil de suspension vertical. La mesure de deux angles est pour cela nécessaire, mais nous nous limitons ici au seul angle φ (figure 1). La mesure de φ s'appuie sur un effet de couplage électromagnétique dans un système de bobines.

- ▷ Une paire de bobines plates $\mathcal{C}_1 = \{\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}''_1\}$ est collée à la paroi extérieure de la sphère \mathcal{S} . Leur axe de révolution commun est dirigé par le vecteur unitaire \vec{u}_3 .
- ▷ Une bobine-sonde \mathcal{C}_2 est fixée sur la plateforme de manière que son axe de symétrie soit confondu avec le fil de suspension vertical.

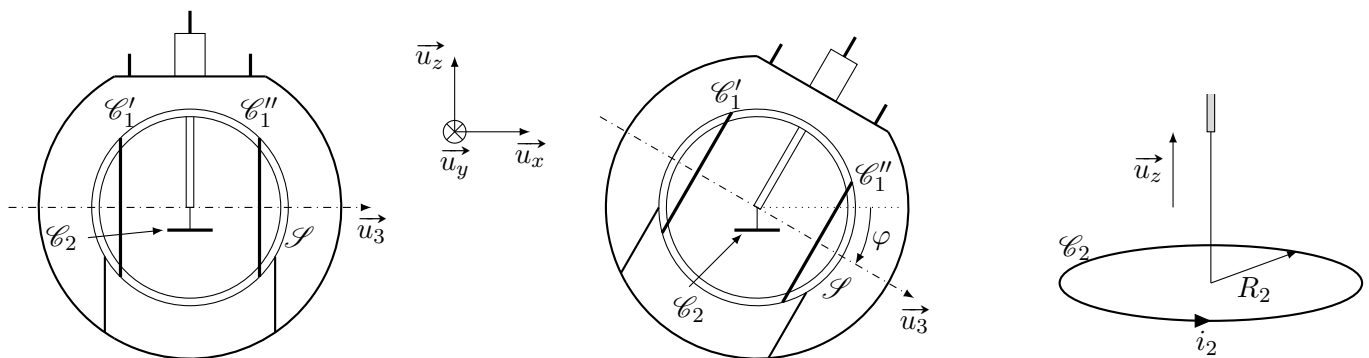


Fig. 1 – La bouée, la sphère \mathcal{S} , \mathcal{C}'_1 et \mathcal{C}''_1 s'inclinent alors que \mathcal{C}_2 se maintient horizontale et le fil de suspension vertical. À droite : vue agrandie en trois dimensions de la bobine-sonde \mathcal{C}_2 .

II.1. Champ magnétique produit par des bobines de Helmholtz

Les deux bobines plates identiques \mathcal{C}'_1 et \mathcal{C}''_1 sont placées dans la configuration dite « de Helmholtz » : assimilables à deux cercles de centres O'_1 et O''_1 , elles possèdent le même axe de révolution, sont formées chacune de N_1 spires parcourues par un courant d'intensité i_1 et sont séparées d'une distance égale à leur rayon R_1 (figure 2). Les vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ forment une base orthonormée directe.

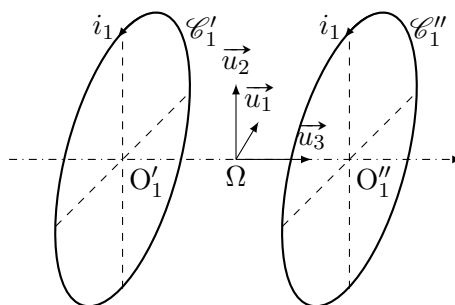


Fig. 2 – Bobines de Helmholtz.

Ce dispositif est réputé produire un champ magnétique presque uniforme dans une région relativement étendue autour du milieu Ω de $[O'_1O''_1]$. Afin de préciser la justesse de cette affirmation, un calcul numérique du champ magnétique a été conduit avec les paramètres $R_1 = 20$ cm, $N_1 i_1 = 1$ A. Ses résultats sont fournis

sur les figures 3 (page 11) et 4 (page 12) . Avant de les exploiter, on s'assure de sa compatibilité avec les lois de l'électromagnétisme.

En plus des coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) d'origine Ω , on utilise des coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe (Ω, \vec{u}_3) . On voit que x_3 joue le rôle de la coordonnée usuellement notée z , mais on prendra garde à ne pas confondre \vec{u}_3 et \vec{u}_z (figure 1). Dans le plan de la figure 3, défini par $\theta = 0$, r se confond avec $|x_1|$ et le vecteur unitaire d'habitude noté \vec{u}_r vaut $\pm \vec{u}_1$ selon le signe de x_1 . On note $B_3(r, x_3) = \vec{B}(r, x_3) \cdot \vec{u}_3$, $B_{\text{axe}}(x_3) = \vec{B}(0, x_3) \cdot \vec{u}_3$, $B_r = \vec{B} \cdot \vec{u}_r$ et $B_1 = \vec{B} \cdot \vec{u}_1$.

La plupart des questions de cette sous-partie demandent un travail sur les figures 3 et 4 (à rendre avec la copie). On fera clairement apparaître les constructions graphiques qui concourent au raisonnement. Leur lisibilité et la clarté de leur utilisation feront partie des critères de notation de l'épreuve.

II.1. Comme il est difficile de représenter le champ magnétique en trois dimensions, la figure 3 se limite au plan $(\Omega, \vec{u}_1, \vec{u}_3)$. Pourquoi cela ne constitue-t-il pas une perte d'information ? En quels points de ce plan la direction du champ était-elle prévisible, et par quels arguments ? Sur le document réponse, représenter par une flèche le champ magnétique en quelques-uns de ces points.

II.2. Quelle équation de Maxwell exprime la conservation du flux de \vec{B} ? En quoi cette propriété s'illustre-t-elle sur la carte fournie ? En utilisant les figures 3 et 4, vous apporterez une réponse quantitative avec au moins deux valeurs numériques du champ à l'appui.

On s'intéresse à la ligne de champ \mathcal{C} passant par les points D et E. De l'un à l'autre, elle traverse sur une longueur d'environ 12 cm une zone de champ très intense. Ailleurs au contraire, le champ paraît beaucoup plus faible.

II.3. Les valeurs du champ observées le long de \mathcal{C} sont-elles compatibles avec l'intensité circulant dans les bobines ?

Deux constatations se dégagent des figures 3 et 4 :

- ▷ dans la région située entre les bobines, le champ reste presque colinéaire à \vec{u}_3 si on ne s'éloigne pas trop de l'axe ;
- ▷ B_{axe} est presque uniforme dans la région délimitée par les bobines.

On se propose d'établir un lien entre ces deux observations.

II.4. Considérons à titre d'exemple le point A ($x_{1A} = 5$ cm, $x_{3A} = 20$ cm), près duquel la ligne de champ est légèrement inclinée. Que valent $B_3(A)$ et $B_r(A)$? Ces valeurs sont-elles cohérentes avec l'inclinaison de la ligne de champ en A ? Une application numérique est attendue.

II.5. En utilisant, au voisinage d'un point de l'axe (coordonnées (r, x_3) avec $r \ll R_1$), l'équation de Maxwell de la 2, démontrer que

$$B_r(r, x_3) \approx -\frac{r}{2} \frac{dB_{\text{axe}}}{dx_3}$$

II.6. Cette relation est-elle satisfaite en A ?

II.7. À partir des graphiques fournis, déterminer le facteur μ tel que

$$B_{\text{axe}}(0) = \mu N_1 i_1$$

Conventionnellement, on considère que le champ est quasi-uniforme dans le cylindre de rayon r_{max} défini par les inégalités suivantes :

$$-\frac{R_1}{4} \leq x_3 \leq \frac{R_1}{4} \quad \text{et} \quad 0 \leq r \leq r_{\text{max}} \quad \text{avec} \quad \left| B_3\left(r_{\text{max}}, \frac{R_1}{4}\right) - B_{\text{axe}}(0) \right| = \frac{1}{10} B_{\text{axe}}(0)$$

II.8. Déterminer r_{max} et représenter ce cylindre sur la figure D.

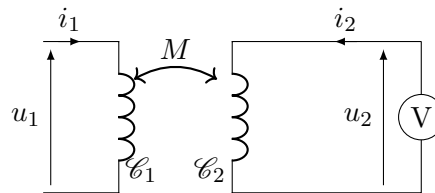
II.2. Exploitation du couplage électromagnétique

La bobine-sonde \mathcal{C}_2 présente un rayon R_2 et une inductance propre L_2 . Elle est formée de N_2 spires de cuivre, chacune parcourue par un courant d'intensité i_2 , enroulées dans le sens de rotation positif par rapport à \vec{u}_z .

On suppose qu'elle reste entièrement dans la région où le champ créé par \mathcal{C}_1 est quasi-uniforme. On note L_1 l'inductance propre de \mathcal{C}_1 et on néglige les résistances de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

II.9. Rappeler la définition du coefficient de mutuelle induction M entre \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . L'exprimer en fonction de N_1 , N_2 , R_2 , μ et φ .

On applique une tension alternative $u_1 = U_{1m} \cos(\omega t)$ aux bornes de \mathcal{C}_1 . La bobine \mathcal{C}_2 est connectée à un voltmètre de très grande impédance d'entrée.



II.10. Écrire les équations électriques régissant le fonctionnement de ces deux circuits, sans tenir compte, à ce stade, de la « très grande impédance » du voltmètre.

II.11. À quelle simplification peut-on procéder en tenant compte de la « très grande impédance » du voltmètre ? En déduire une relation entre u_1 , u_2 , L_1 et M .

II.12. Application numérique : $U_{1m} = 5.00$ V, $U_{2m} = 170$ mV, $L_1 = 3.6$ mH, $R_2 = 5.0$ cm, $N_1 = 50$, $N_2 = 200$. Calculer le coefficient de mutuelle induction M (en valeur absolue) et l'angle d'inclinaison φ (supposé positif) en degré.

Analyse vectorielle en coordonnées cylindriques

$$\operatorname{div} \vec{A}(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\Delta \psi(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

$$\operatorname{rot} \vec{A}(r, \theta, z) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

Documents réponse à rendre avec la copie

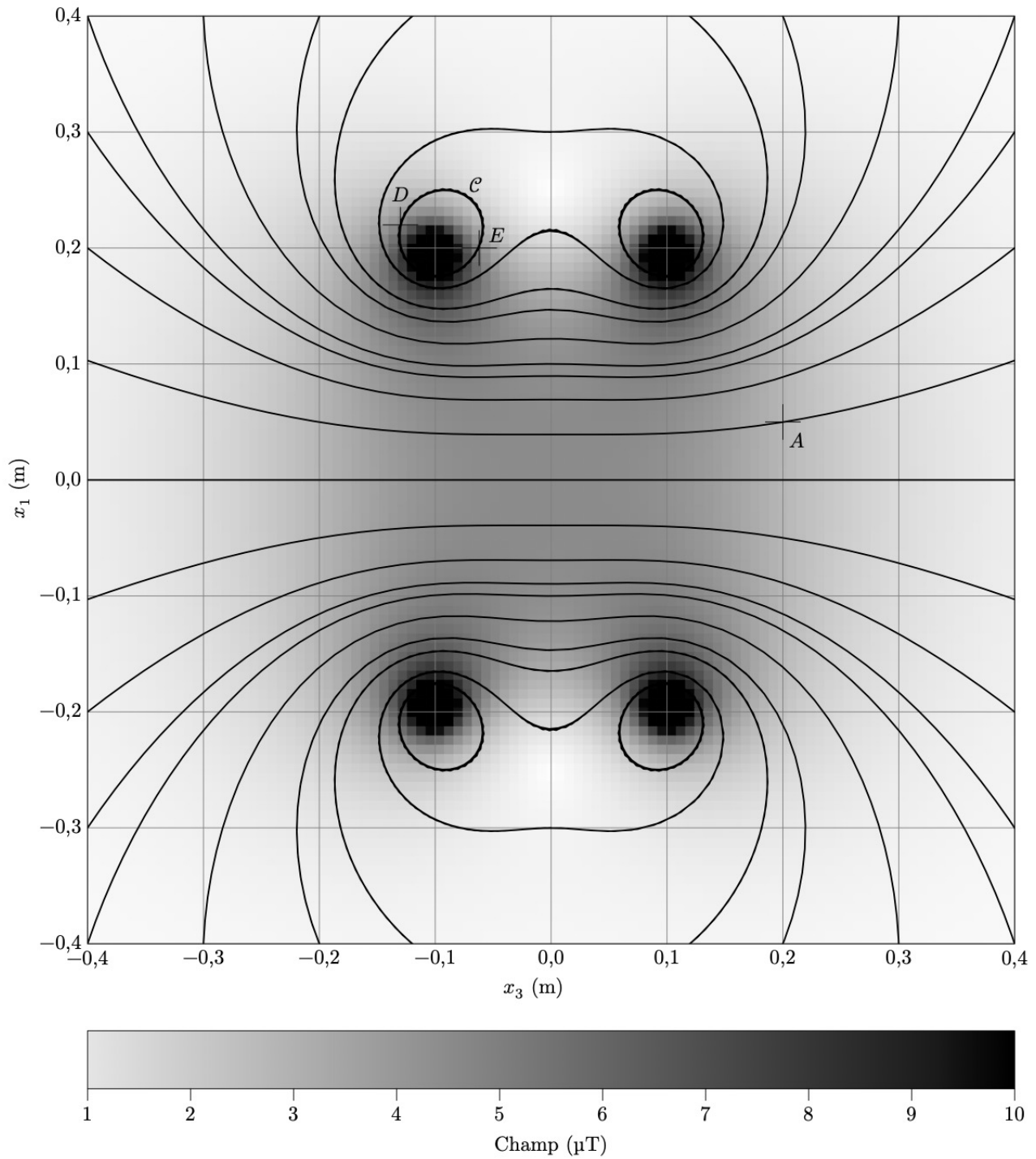


Fig. 3 – Carte de champ créé par des bobines de Helmholtz, dans le plan $\{O_1, \vec{u}_3, \vec{u}_1\}$

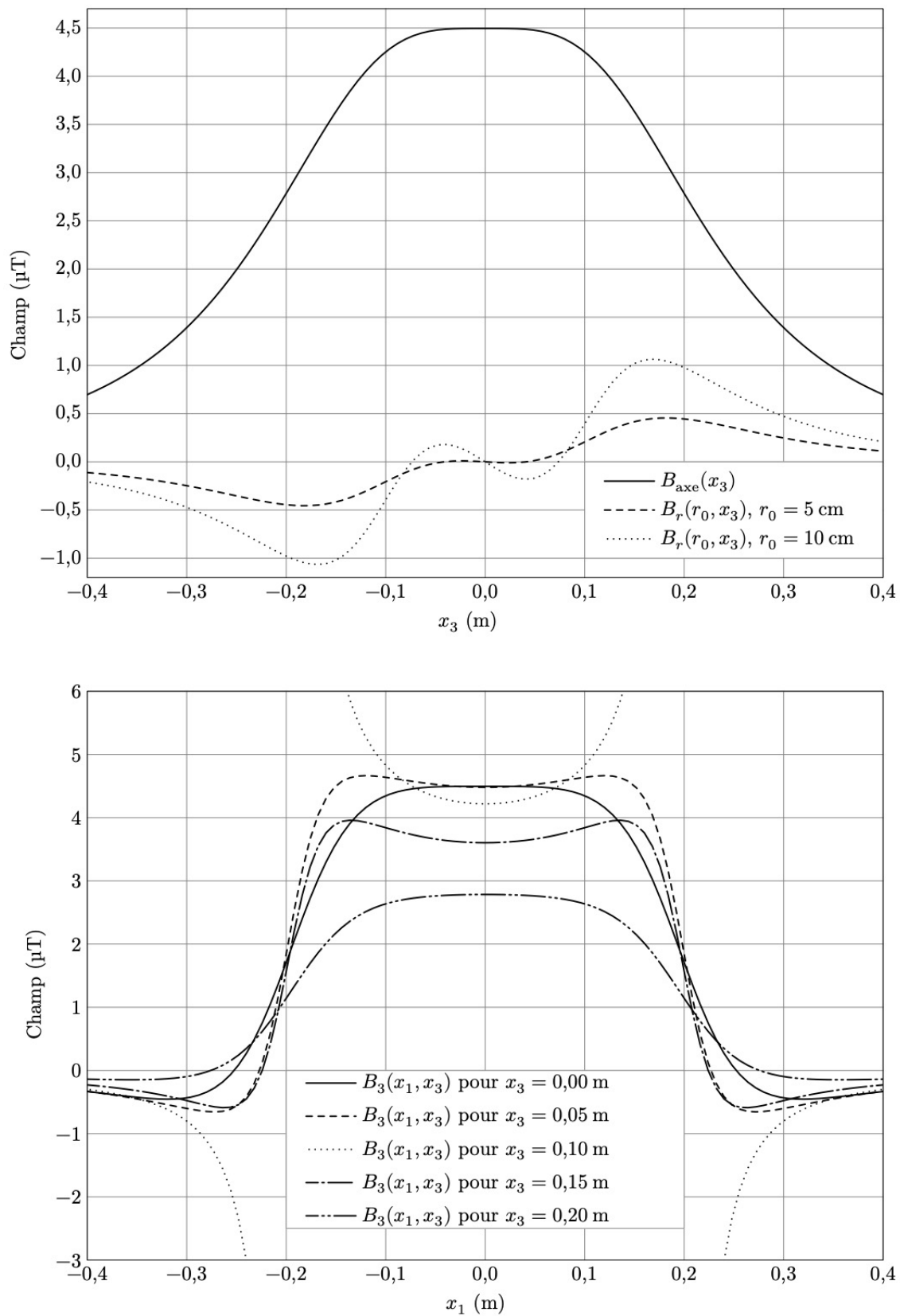


Fig. 4 – Profils du champ magnétique de long de certains segments. Sur le premier graphique, r est fixé sur chaque courbe et l'abscisse est la cote x_3 . Sur le second graphique, x_3 est fixé sur chaque courbe et l'abscisse est la coordonnée x_1 .