

**Sujet MPI - Le devoir dure 4h.**

Les différents problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. La présentation globale de la copie ainsi que l'homogénéité des formules est prise en compte dans la notation.

**Problème I - Cours - Bascule à mémoire RS**

On note  $S$  l'entrée SET,  $R$  l'entrée RESET et  $Q$  la sortie du système.

**I.1.** Rappeler le principe d'une bascule à mémoire RS.

**I.2.** Donner la table de vérité en prenant  $R$ ,  $S$  et  $Q^-$  en entrée,  $Q^-$  étant la valeur de la sortie avant la bascule.

**I.3.** Donner la définition d'un système bistable.

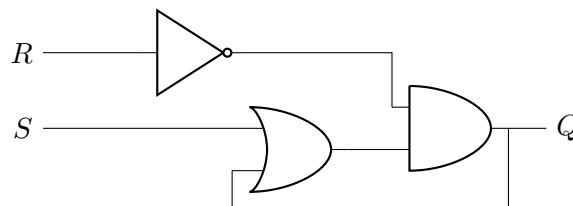
**I.4.** Indiquer pourquoi plusieurs réalisations sont possible pour un tel circuit.

**I.5.** Montrer que la relation

$$Q_+ = S + \bar{R} \cdot Q_- . \quad (0.1)$$

définit une bascule RS. Justifier son appellation « mémoire à inscription prioritaire ». Donner le circuit logique correspondant.

**I.6.** On donne le circuit suivant de la figure 1. Justifier que ce circuit constitue une bascule RS.



**Fig. 1** – Circuit proposé.

## Problème II - Le gecko

Ce sujet est extrait du concours CCINP PC 2021.

### Données :

- ▷ Permittivité du vide :  $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$
- ▷ Constante de Boltzmann :  $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
- ▷ Définition du Debye :  $1 \text{ D} = 3.33 \times 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$
- ▷ Gradient en coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}} U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$$

Source : Autumn K., L'inusable adhésif des pattes du gecko, Pour la Science, n° 343, 2006, p. 82- 88.

Le gecko est un petit lézard capable de se déplacer à des vitesses de plusieurs mètres par seconde sur les murs ou les plafonds de pratiquement toutes natures, dans presque toutes les conditions. Des expériences menées en 2002 par l'équipe de l'américain Kellar Autumn ont montré que la spectaculaire faculté d'adhésion de l'animal est uniquement due à des forces de Van der Waals. L'adhésion est possible grâce à l'anatomie particulière des coussinets des doigts du lézard. Ces derniers sont recouverts de poils microscopiques, les sétules, ramifiés en des centaines de branches terminées par une spatule pouvant s'approcher à quelques nanomètres de la surface de contact.

### II.1. Interactions entre molécules polaires

On considère une molécule polaire située dans le vide, modélisée par un dipôle électrique rigide de moment dipolaire électrique permanent  $\vec{p}_1 = p_1 \vec{u}_z$ . Le dipôle, centré en un point  $O$ , est constitué de deux charges ponctuelles opposées,  $+q$  et  $-q$  (avec  $q > 0$ ), situées sur l'axe  $(O, \vec{u}_z)$  aux points respectifs  $P$  et  $N$  distants de  $a = PN$  (figure 2). On repère tout point  $M$  de l'espace par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  dans le repère  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ .

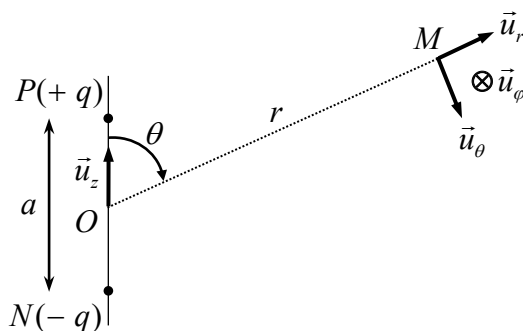


Fig. 2 – Dipôle électrique centré en un point  $O$

**II.1.** Expliquer l'origine du moment dipolaire permanent de certaines molécules. Donner l'expression en fonction de  $a$  et  $q$  du moment dipolaire électrique  $\vec{p}_1$  de la molécule polaire.

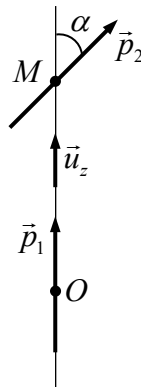
**II.2.** Établir l'expression du potentiel électrostatique  $V_1(M)$  créé en  $M$  par la molécule polaire dans le cadre de l'approximation dipolaire qu'on explicitera. On donnera le résultat en fonction de  $p_1$ ,  $\epsilon_0$  et des coordonnées sphériques du point  $M$ .

**II.3.** En déduire que le champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  créé en  $M$  par la molécule polaire s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) .$$

Une seconde molécule polaire, modélisée par un dipôle rigide de moment dipolaire électrique permanent  $\vec{p}_2$ , est située au point  $M$  sur l'axe  $(O, \vec{u}_z)$  tel que  $\theta = 0$ , à la distance  $r$  fixe du point  $O$ . À un instant donné, son moment dipolaire forme un angle  $\alpha$  avec cet axe (figure 3). Dans ces conditions, la molécule

plongée dans le champ électrostatique dû à l'autre molécule située au point  $O$  subit un couple de forces de moment :  $\vec{\Gamma} = \vec{p}_2 \wedge \vec{E}_1(M)$ . On rappelle l'expression de l'énergie potentielle d'interaction des deux molécules  $\mathcal{E}_{12} = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1(M)$ .



**Fig. 3** – Interaction entre deux molécules polaires

**II.4.** Quel est l'effet du couple de forces subi par la molécule fixée au point  $M$ ? Justifier l'orientation de son moment dipolaire électrique lorsqu'elle est en équilibre stable.

Les deux molécules sont supposées identiques, de moments dipolaires électriques de même valeur  $p_1 = p_2 = p = 1 \text{ D}$ .

**II.5.** Estimer l'énergie potentielle d'interaction des deux molécules, distantes de  $r = 0.5 \text{ nm}$ , en supposant leurs moments dipolaires électriques alignés. Comparer cette énergie à l'énergie d'agitation thermique qui est de l'ordre de  $k_B T$  où  $k_B$  est la constante de Boltzmann, à la température ambiante  $T = 293 \text{ K}$ . Conclure.

Du fait de l'agitation thermique, on doit considérer l'énergie potentielle d'interaction moyenne entre deux dipôles situés à une distance  $r$  dont les orientations relatives sont sujettes à des variations aléatoires. À température suffisamment élevée, on montre que cette énergie potentielle d'interaction moyenne est de la forme :  $\langle \mathcal{E}_{12} \rangle = -\frac{C_K}{r^6}$  où  $C_K = \frac{1}{k_B T} \left( \frac{p^2}{2\pi\epsilon_0} \right)^2$ .

**II.6.** Donner un ordre de grandeur de  $C_K$  à la température ambiante  $T = 293 \text{ K}$ . Vérifier que la force  $\vec{F}_{12}$  qui dérive de cette énergie potentielle est attractive. On rappelle que  $\vec{F}_{12} = -\text{grad} \langle \mathcal{E}_{12} \rangle$ .

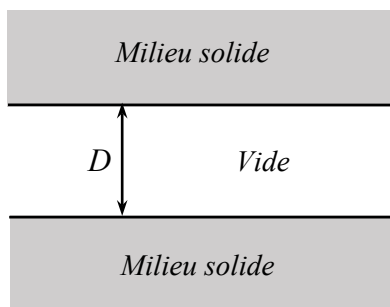
## II.2. Calcul de la force d'adhérence du gecko au plafond

La force, calculée à la question précédente, correspond à une interaction de Van der Waals entre molécules polaires. Si on considère maintenant deux plans infinis parallèles, distants de  $D$  et séparant chacun un milieu solide (figure 4), on montre en prenant en compte l'ensemble des interactions de Van der Waals que la force surfacique entre les deux milieux s'écrit :  $f(D) = \frac{A}{6\pi D^3}$ . La constante  $A$ , appelée constante de Hamaker, dépend de la nature des interactions de Van der Waals et des densités moléculaires des deux solides en interaction.

**II.7.** Vérifier que la constante de Hamaker  $A$  est homogène à une énergie.

**II.8.** Un gecko de masse  $m = 50 \text{ g}$  est suspendu par ses quatre pattes au plafond. Le gecko possède au total 6 millions de sétules, comportant chacune en moyenne 500 spatules. En modélisant une spatule par une surface carrée de  $0.2 \mu\text{m}$  de côté située à une distance  $D = 1 \text{ nm}$  du plafond, estimer le pourcentage de sétules utilisées par le gecko pour soutenir sa masse. On prendra  $A = 10^{-19} \text{ J}$  et on négligera tout effet de bord.

Sachant que l'équipe de Kellar Autumn a constaté qu'un gecko de  $50 \text{ g}$  utilise à son maximum d'adhérence uniquement  $0.04\%$  de ses sétules pour soutenir sa masse, peut-on bien imputer les facultés d'adhérence



**Fig. 4** – Deux milieux plans infinis en interaction

du gecko aux interactions de Van der Waals ? Pourquoi le gecko mobilise-t-il certainement davantage de sétules pour assurer son adhérence ?

**II.9.** À un instant pris pour origine, on suppose que le gecko lâche le plafond et chute de 10 cm avant de se rattraper à l'aide d'une patte à une surface verticale. Sachant que l'équipe de Kellar Autumn a pu mesurer une force de cisaillement (opposée au glissement) de l'ordre de 10 N par patte, estimer la distance que doit parcourir le gecko lorsque sa patte est en contact avec le mur pour s'arrêter. On supposera qu'il mobilise 50% de la capacité de cisaillement maximale de sa patte.

*Cette question fait appel à une démarche de résolution de problème. Il est notamment attendu de préciser chaque notation introduite, de présenter de façon claire les hypothèses retenues, de mener de bout en bout un calcul littéral, puis d'effectuer l'application numérique attendue.*

## Problème III - Détecteur de wagons

Ce sujet est extrait de l'épreuve de physique E3A 2023.

### II Détecteur de wagons

Dans les attractions qui utilisent des wagons, il est parfois nécessaire de détecter le passage d'un wagon à un endroit donné. Ceci peut se faire à l'aide d'un capteur inductif, que nous étudions dans cette partie.

Sauf pour la toute dernière, les sous-parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment.

#### II.1 Conséquence du passage d'un objet métallique

Le détecteur comporte une bobine d'inductance  $L_1$ , placée sur le bâti du manège et proche du lieu de passage des wagons. On note  $u(t)$  la tension à ses bornes (figure 5).

Lorsqu'un wagon passe à proximité, la bobine  $L_1$  du détecteur devient magnétiquement couplée aux éléments métalliques du wagon. Ces derniers sont décrits comme une inductance  $L_2$ , fermée sur elle-même et de résistance électrique négligeable. On note  $M$  le coefficient de couplage entre  $L_1$  et  $L_2$  (cf. figure 5).

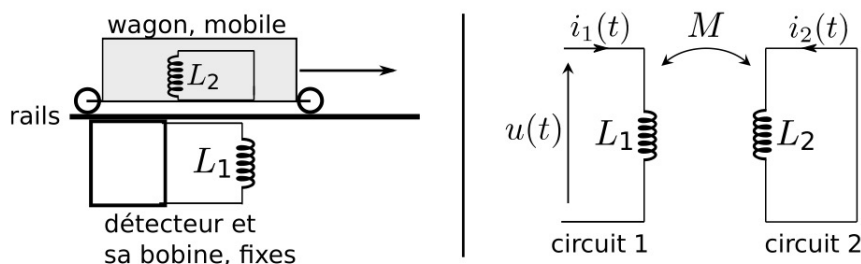


Figure 5. Gauche : schéma de principe. Droite : schéma électrique, avec les bobines 1 et 2, couplées magnétiquement.

17 - En étudiant le circuit 2, montrer que  $i_2(t) = -\frac{M}{L_2}i_1(t) + C$  où  $C$  est une constante.

18 - En étudiant le circuit 1, montrer que la relation entre  $u(t)$  et  $i_1(t)$  se met sous la forme  $u = L \frac{di_1}{dt}$ . Ceci montre que le circuit 1 est équivalent à une bobine d'inductance  $L$ , non couplée magnétiquement avec un autre circuit. On donnera l'expression de  $L$  en fonction de  $L_1$ ,  $L_2$  et  $M$ .

Ce qui précède montre que le passage du wagon modifie l'inductance équivalente à la bobine du circuit 1, qui passe de  $L_1$  à  $L$ . Il faut donc un moyen de mesurer un changement de valeur d'inductance.

#### II.2 Étude d'un circuit RLC

On étudie le circuit RLC série représenté figure 6. Pour  $t < 0$  le circuit est ouvert et le condensateur est chargé à la tension  $U_0 > 0$ . À  $t = 0$  l'interrupteur est fermé. On étudie l'évolution de la tension  $u_c(t)$  aux bornes du condensateur (figure 6).

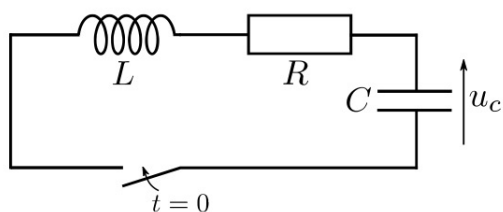


Figure 6 : circuit RLC étudié dans cette sous-partie.

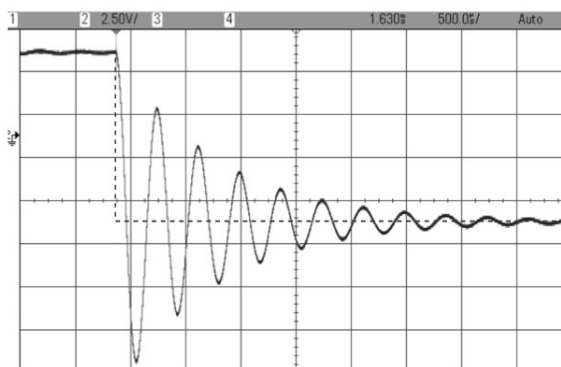


Figure 7 : relevé expérimental de la tension  $u_c(t)$ .

19 - Démontrer que  $u_c(t)$  vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{u}_c + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_c + \omega_0^2 u_c = 0. \quad (1)$$

On donnera les expressions de  $\omega_0$  et de  $Q$  en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

20 - On se place dans le régime qui est suivi sur le relevé de la figure 7. Qu'est-ce que ceci implique sur la valeur de  $Q$  ?

Toujours à l'aide de la figure 7, estimer approximativement sans calculs la valeur de  $Q$ .

21 - Toujours dans le cas du régime suivi figure 7, établir l'expression de la solution de l'équation (1). On l'exprimera en fonction de  $\omega_0$ ,  $Q$ , du temps  $t$ , et de deux constantes d'intégration  $A$  et  $B$  qu'on ne cherche pas à déterminer pour l'instant.

22 - Justifier soigneusement pourquoi  $u_c(0^+) = U_0$  et  $i(0^+) = 0$ , où  $i$  est le courant dans le circuit et où l'instant  $0^+$  signifie "juste après la fermeture de l'interrupteur".

23 - En déduire les expressions des constantes d'intégration  $A$  et  $B$ .

24 - Montrer que si  $Q$  est grand devant 1, alors on peut approximer la pseudo-période des oscillations par  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

Ce qui précède montre que le circuit RLC oscille naturellement à une fréquence qui fait intervenir l'inductance  $L$ . Le relevé de la figure 7 montre que cette fréquence vaut  $f_0 = 2660$  Hz. Si l'inductance  $L$  est modifiée par le passage d'un wagon (sous-partie II.1), alors la fréquence d'oscillation change. Il reste donc à obtenir un moyen de détecter un changement de fréquence.

### II.3 Étude d'un multiplieur

On dispose du signal produit par le circuit RLC précédent. On néglige l'amortissement des oscillations (en réalité, on modifie le circuit pour annuler cet amortissement, d'une façon non étudiée ici), ce qui revient à considérer que le signal produit aux bornes de  $u_c$  est de la forme :

$$e_1(t) = U_0 \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t].$$

Ci-dessus  $f_0$  est la fréquence d'oscillation du circuit en l'absence de wagon, et  $f_0 + \Delta f$  est ce que devient cette fréquence en présence d'un wagon.

Ce signal est envoyé à l'entrée d'un multiplieur. Sur la seconde entrée du multiplieur est envoyé un signal de référence,

$$e_2(t) = U'_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0),$$

dont la fréquence est fixe, indépendamment du passage ou non d'un wagon. Le multiplieur produit à sa sortie le signal :

$$v(t) = K e_1(t) \times e_2(t),$$

avec  $K > 0$  une constante.

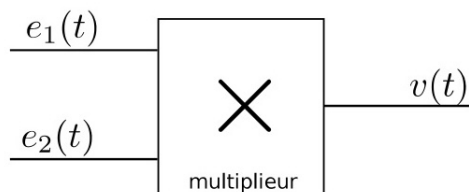


Figure 8 : multiplieur.

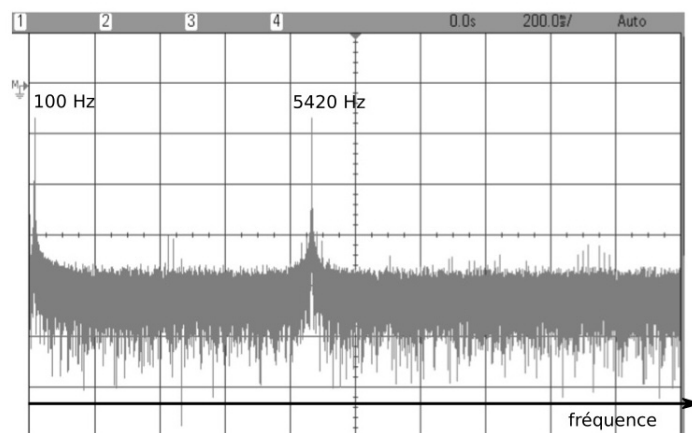


Figure 9 : relevé expérimental du spectre en amplitude de  $v(t)$ , en sortie du multiplieur.

- 25 - Le spectre du signal  $v(t)$  comporte deux composantes, l'une de fréquence  $f_1$  et l'autre de fréquence  $f_2$ . En écrivant  $v(t)$  d'une autre manière, établir l'expression de  $f_1$  et de  $f_2$  en fonction de  $f_0$  et de  $\Delta f$ .
- 26 - Donner également les expressions des amplitudes de chacune des deux composantes du spectre.
- 27 - La figure 9 est un enregistrement du spectre en amplitude de  $v(t)$ . En déduire les valeurs de  $\Delta f$  et de  $f_0$  dans ce cas-ci.

#### II.4 Filtre passe-bas

L'avant dernière étape est de réaliser un filtre passe-bas qui ne laisse passer que la composante basse fréquence du signal  $v(t)$ . On considère ainsi le circuit de la figure 10. On note  $s(t)$  sa sortie.

On note  $\underline{v}(t)$  et  $\underline{s}(t)$  les grandeurs complexes associées à  $v(t)$  et  $s(t)$ .

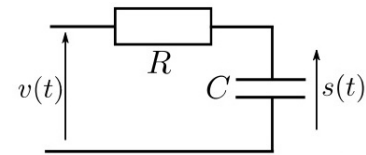


Figure 10 : circuit RC étudié dans cette sous-partie.

- 28 - Par une étude asymptotique du circuit, montrer qu'il s'agit bien d'un filtre passe-bas.
- 29 - Établir l'expression de la fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{v}}$  de ce circuit, en fonction de  $R$  et de  $C$  (et de la pulsation  $\omega$  du signal d'entrée).
- 30 - Établir l'expression de  $|\underline{H}|$ , ainsi que l'expression du déphasage  $\Delta\varphi$  induit par ce filtre, en fonction de  $R$ ,  $C$  et  $\omega$ .
- 31 - Démontrer, en partant de l'expression de  $\underline{H}$  ou de  $|\underline{H}|$ , que l'asymptote haute fréquence dans le diagramme de Bode en amplitude a pour pente  $-20$  dB/décade.

On donne dans la figure 11 le diagramme de Bode en amplitude et en phase du filtre.

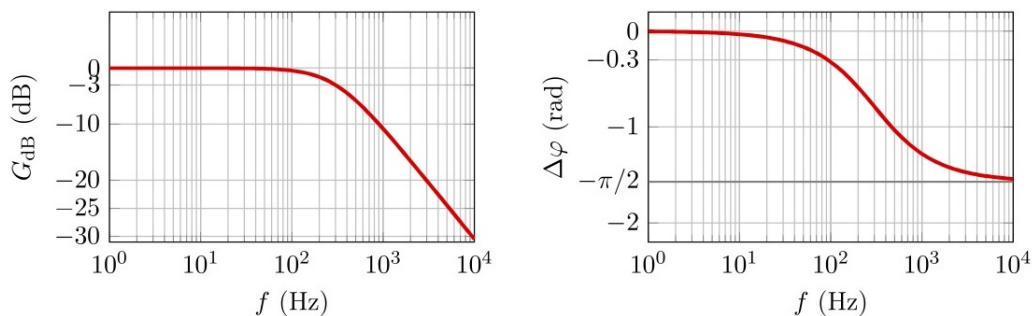


Figure 11 : diagramme de Bode en amplitude et en phase du filtre.

- 32 - À l'aide de la figure 11, estimer la valeur de la fréquence de coupure de ce filtre.

On considère en entrée du filtre le signal

$$e(t) = E_0 \cos(2\pi ft)$$

avec  $E_0 = 1$  V et  $f = 100$  Hz. Pour les deux questions qui suivent, on ne raisonne pas à partir des expressions théoriques de  $|\underline{H}|$  ou de  $\arg(\underline{H})$ , mais en utilisant la figure 11.

- 33 - Donner l'expression du signal de sortie qui correspond à  $e(t)$  en entrée. On donnera les valeurs numériques de l'amplitude et de la phase à l'origine de ce signal de sortie.
- 34 - Même question, avec cette fois une fréquence  $f = 5$  kHz pour le signal d'entrée (et toujours  $E_0 = 1$  V).

## II.5 Chaîne complète

Si on résume : le passage d'un wagon modifie l'expression de l'inductance  $L$  du circuit RLC, qui devient  $L = L_1 - \frac{M^2}{L_2}$ . Sa fréquence d'oscillation passe alors de  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C}}$  à  $f_0 + \Delta f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ .

**35** - Montrer que si  $M \ll \sqrt{L_1L_2}$ , alors  $\Delta f = f_0 \times \frac{M^2}{2L_1L_2}$ .

Le signal de fréquence  $f_0 + \Delta f$ , précédemment noté  $e_1(t)$ , est envoyé dans le multiplieur. La sortie  $v(t)$  du multiplieur est envoyée dans le filtre passe-bas (cf. figure 12). Le signal  $e_2(t)$  est le signal de référence de fréquence  $f_0$ .

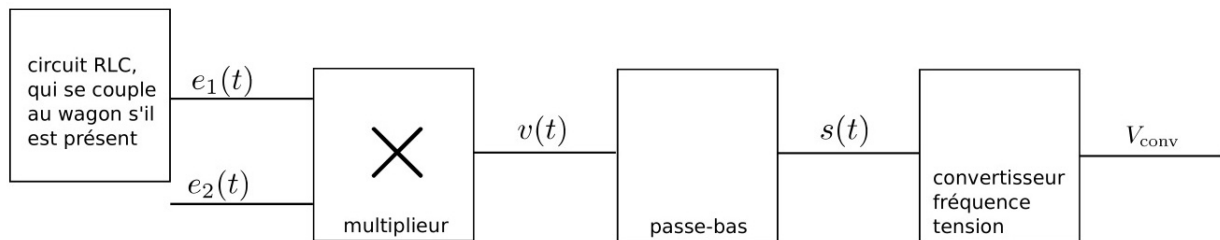


Figure 12 : chaîne complète de traitement du signal.

**36** - Indiquer alors l'expression du signal  $s(t)$  observé en sortie du filtre passe-bas, en supposant que celui-ci coupe entièrement tout signal de fréquence supérieure ou égale à  $f_0$ . On notera son amplitude  $S_0$  sans chercher à la déterminer.

L'écart  $\Delta f$  varie lors du passage du wagon. Pour simuler ceci, nous remplaçons le wagon par une bobine, que l'on fait passer devant la bobine du circuit 1 (figure 13 à gauche). Il en résulte le signal  $s(t)$  enregistré sur la figure 13 à droite.

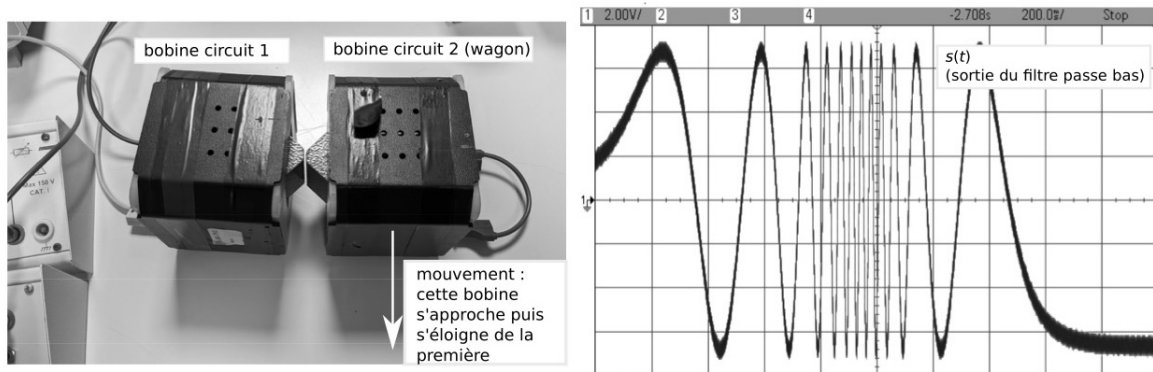


Figure 13. Gauche : passage de la bobine  $L_2$  à proximité de la bobine  $L_1$ . Droite : signal correspondant en sortie du filtre passe-bas.

Le convertisseur fréquence-tension délivre une tension  $V_{\text{conv}}$  dont la valeur est proportionnelle à la fréquence du signal envoyé sur son entrée. On note  $\alpha$  la constante de proportionnalité.

**37** - Donner l'expression de cette tension en fonction, entre autre, de  $M$ .

**38** - Conclure en traçant l'allure de  $V_{\text{conv}}(t)$  lors du passage d'un wagon, sachant qu'un tel passage a pour conséquence de faire augmenter puis diminuer  $M$ .