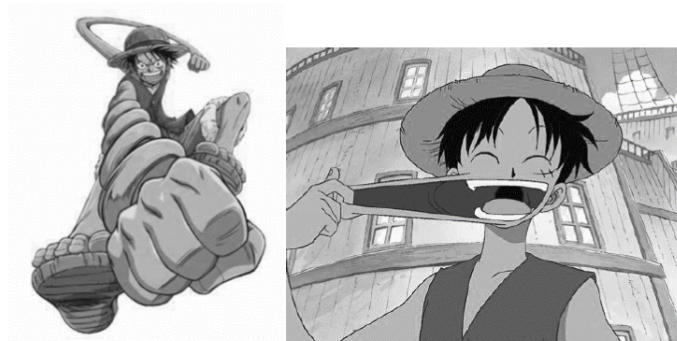


Travail demandé

à rendre le 30/01/2026

Chaque étudiant rend une copie même s'il n'est pas interdit de chercher les exercices en groupe.

Problème I - Gomu no jet pistol : chaîne d'oscillateurs et onde mécanique*Ce sujet est extrait de l'épreuve de physique CCINP MP 2023.*

Luffy peut étendre ses bras, notamment en emmagasinant l'énergie potentielle élastique et frapper son adversaire. On se propose ici de modéliser un exemple d'extension élastique.

I.1 - Oscillateur harmonique

Soit une molécule diatomique dont les deux atomes ne peuvent se déplacer que sur la direction (Ox) . En notant x la distance interatomique, l'énergie potentielle d'interaction s'écrit, selon la relation de Morse :

$$V(x) = V_0 \left[1 - e^{-a(x-x_0)} \right]^2$$

avec V_0 , a et x_0 des constantes réelles positives.

Q1. Déterminer la distance interatomique d'équilibre, appelée longueur de liaison à l'équilibre $x_{\text{éq}}$.

On s'intéresse aux petits mouvements autour de la position d'équilibre : $x = x_{\text{éq}} + \varepsilon$, avec $|\varepsilon| \ll x_{\text{éq}}$.

Q2. En développant l'énergie potentielle $V(x)$ au second ordre en ε , montrer que la force d'interaction résultante est équivalente à celle d'un ressort de constante de raideur k dont on donnera l'expression en fonction de V_0 et de a .

- Q3.** Si on appliquait cette force à une particule de masse m et de position $\varepsilon(t)$, quelle serait la pulsation des oscillations ω_0 de celle-ci ? Représenter la vibration au cours du temps $t \rightarrow \varepsilon(t)$ pour des conditions initiales données : $\varepsilon(0) = \beta$ et $\dot{\varepsilon}(0) = 0$.
- Q4.** Donner, sur le même graphique, l'allure des courbes représentatives de l'énergie potentielle de Morse et de l'énergie potentielle harmonique approchée en fonction de la distance interatomique.

I.2 - Chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques

On considère une chaîne unidimensionnelle infinie d'oscillateurs harmoniques identiques, de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Les masses sont toutes égales et désignées par des indices entiers successifs $n \in \mathbb{N}$. On note m cette masse des masselottes entre les ressorts, $\vec{r}_n(t) = x_n(t)\vec{u}_x$ le vecteur position de la $n^{\text{ième}}$ masse et $u_n(t)$ son déplacement par rapport à sa position d'équilibre. Le référentiel est supposé galiléen. On ne prend en compte que les interactions harmoniques entre les masses.

Initialement, à $t = 0$, la chaîne est au repos. La distance entre deux atomes successifs à l'équilibre a (**figure 1**) est égale à la longueur à vide, $\ell_0 = a$.

On prend comme origine sur l'axe la position repérée par $n = 0$ à $t = 0$.

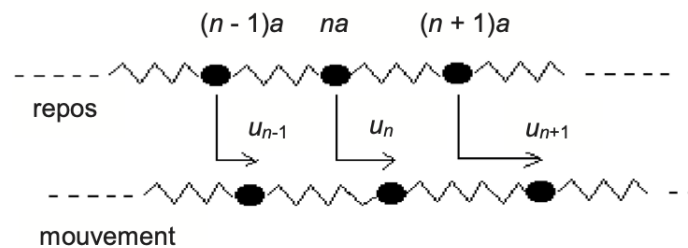


Figure 1 - Chaîne d'oscillateurs identiques

- Q5.** Pour $n \in \mathbb{N}$, écrire la position initiale de la $n^{\text{ième}}$ masse ($x_n(0)$) en fonction de n et de a . En déduire son écart $u_n(t)$ par rapport à sa position d'équilibre en fonction de $x_n(t)$, n et de a .
- Q6.** Établir que l'équation du mouvement de la $n^{\text{ième}}$ masse, se met sous la forme : $\ddot{u}_n = \omega_0^2 [u_{n+1} + u_{n-1} - \alpha u_n]$ avec α , constante réelle à déterminer.

On s'intéresse à la propagation d'ondes mécaniques dans cette chaîne. On cherche à savoir s'il existe un réel q strictement positif tel que, en notation complexe, on puisse écrire :

$$\underline{u}_n(t) = U_0 \exp(i(\omega t - qna)) \text{ avec } i^2 = -1, \omega \text{ et } U_0 \text{ strictement positifs.}$$

- Q7.** Cette onde est-elle harmonique ? Que représentent U_0 et ω ?

Cette onde présente une périodicité spatiale s'il existe une $p^{\text{ième}}$ masse (avec $p > n$) telle que : $\underline{u}_p(t) = \underline{u}_n(t)$. On définit la longueur d'onde comme la plus petite distance séparant deux telles masses au repos.

- Q8.** Établir l'expression de la longueur d'onde λ en fonction de a . Que représente finalement q ?
- Q9.** Montrer que la relation de dispersion, reliant ω et q , est $\omega^2 = 4\omega_0^2 \left(\sin \frac{qa}{2} \right)^2$.
- Représenter graphiquement la fonction : $[q \mapsto \omega(q)]$ en se restreignant à l'intervalle $\left[0, \frac{2\pi}{a} \right]$.
- Q10.** Rappeler les définitions et les significations de la vitesse de groupe v_g et de la vitesse de phase v_ϕ . Comment lit-on ces vitesses sur le graphe de la question **Q9** ?
- Q11.** La chaîne est-elle dispersive ? Quelle condition doit satisfaire ω pour que q existe ? Préciser la nature du filtre que constitue la chaîne d'oscillateurs vis-à-vis de ces ondes.
- Q12.** Déterminer v_g et v_ϕ pour $q \ll \frac{\pi}{a}$ et pour $q = \frac{\pi}{a}$. On précisera la nature de l'onde dans les deux cas.

Le fluide (ou haki en VO) est un pouvoir mystérieux du manga, qui permet à son possesseur d'utiliser sa propre énergie spirituelle à des fins diverses, notamment pour renforcer sa peau et la rendre aussi dure qu'un diamant.

I.3 - Solide cristallin

On considère ici un cristal parfait, c'est-à-dire un assemblage spatial triplement périodique d'un très grand nombre d'atomes.

Hypothèses du modèle :

- tous les défauts du cristal réel sont négligés ;
- l'agitation thermique n'est qu'une vibration autour d'une position moyenne des atomes qui sera prise comme position d'équilibre ;
- les vibrations d'origine thermique sont décomposables en ondes planes ;
- seules les interactions entre plus proches voisins dans une maille cristalline cubique simple sont considérées : les trois dimensions de l'espace sont découplées et l'étude sera faite sur l'une d'elles selon le modèle d'un cristal à une dimension ;
- l'énergie potentielle de liaisons entre deux atomes de masse m , distants de x , sera modélisée par le potentiel de Lennard-Jones :

$$V(x) = \frac{A}{x^{12}} - \frac{B}{x^6}, \quad (A, B) \in \mathbb{R}_+^{*2}.$$

Q13. À quelles interactions correspondent les deux termes du potentiel de Lennard-Jones ?

Q14. En notant a , la distance entre deux atomes à l'équilibre, montrer que V se met sous la forme :

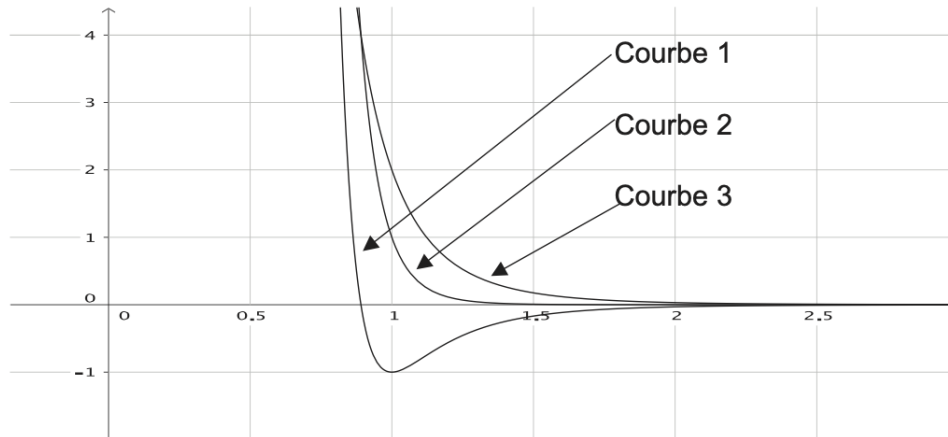
$$V(x) = \Theta_0 \left[\left(\frac{a}{x} \right)^{12} - 2 \left(\frac{a}{x} \right)^6 \right], \quad \text{où la profondeur du puits de potentiel } \Theta_0 \text{ est à exprimer en}$$

fonction de B et de a .

Q15. Sur le graphique ci-après, ont été représentées les courbes :

$$\left[\frac{x}{a} \mapsto \frac{V(x)}{\Theta_0} \right], \left[\frac{x}{a} \mapsto \left(\frac{a}{x} \right)^{12} \right] \text{ et } \left[\frac{x}{a} \mapsto 2 \left(\frac{a}{x} \right)^6 \right].$$

Identifier ces courbes.



Q16. Montrer que, tant que l'amplitude des oscillations reste négligeable devant a , la liaison entre deux atomes est modélisable par un ressort de constante de raideur k que l'on exprimera en fonction de Θ_0 et de a . On pourra développer le potentiel au second ordre grâce à la formule de Taylor.

Q17. Calculer k et ω_0 pour $a = 2,0 \cdot 10^{-10}$ m, $\Theta_0 = 0,10$ eV et $m = 1,0 \cdot 10^{-25}$ kg.

Cette modélisation du solide cristallin permet de décrire la propagation d'ondes mécaniques longitudinales dans les solides et on s'intéresse ici aux aspects énergétiques. On suppose que le mouvement des masses correspond au passage d'une onde plane harmonique de pulsation ω dont la formule est indiquée entre les questions **Q6** et **Q7**.

Q18. Exprimer la valeur moyenne temporelle de l'énergie cinétique $\langle E_c \rangle$ d'un atome indicé par n en fonction de m , U_0 et ω . En déduire l'énergie cinétique moyenne pour N atomes.

Q19. Justifier que l'énergie potentielle moyenne $\langle E_p \rangle$ du $n^{\text{ième}}$ atome se met sous la forme :

$$\langle E_p \rangle = \frac{k}{4} (|u_{n+1} - u_n|^2 - |u_{n-1} - u_n|^2).$$

Q20. Grâce à la forme de l'onde et à la formule de dispersion obtenue précédemment, exprimer $\langle E_p \rangle$ en fonction de m , U_0 et de ω .

Q21. En déduire l'énergie interne du cristal en fonction de la température T .

I. 4 - Du discret au continu

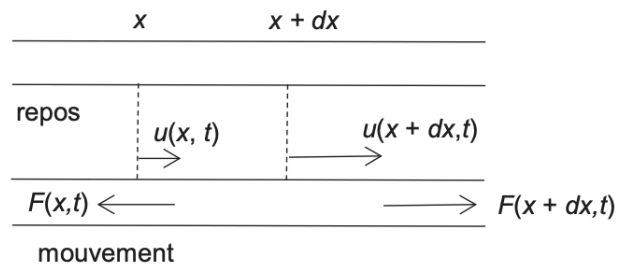


Figure 2 - Passage au continu

Q22. À partir de la relation de dispersion, exprimer la longueur d'onde λ de l'onde qui se propage en fonction de ω , ω_0 et de a .

Calculer λ pour des fréquences ultrasonores ($f = 500$ kHz). Commenter.

Q23. La comparaison de la longueur d'onde au paramètre a permet d'écrire $u_n(t) = u(x, t)$

(figure 2) et d'obtenir une équation de D'Alembert de la forme $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \frac{k}{m} a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$.

Calculer la célérité de l'onde dans le cristal pour des fréquences ultrasonores.

Grâce à ce corps élastique, malléable, Luffy peut étirer son bras loin derrière lui et le ramener brutalement en avant, frappant son adversaire ; l'énergie élastique emmagasinée est alors relâchée à l'impact...

Problème II - Délocaliser les centres de données, une solution d'avenir ?

Ce sujet est extrait de l'épreuve de physique CCS MP 2022.

Afin de lutter contre les cyberattaques, mais surtout de profiter d'un refroidissement optimal et « gratuit », une start-up californienne projette de stocker des données dans des satellites en orbite à basse altitude autour de la Terre. Le projet prévoit la mise en orbite de 10 satellites en tout.

II.A – De la difficulté d'une communication directe

Chaque satellite est assimilé à un point matériel M de masse $m_S = 4 \text{ t}$, en orbite circulaire à l'altitude $h = 650 \text{ km}$ autour de la Terre de centre O , de rayon R_T et de masse M_T . On suppose que la Terre est un astre présentant une répartition de masse à symétrie sphérique de centre O . Les frottements sont négligés ; seule la force gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite est à prendre en compte.

L'étude est réalisée dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g , de repère associé $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, supposé galiléen. L'axe (Oz) est défini de sorte que la trajectoire du satellite considéré soit contenue dans le plan $z = 0$. L'ensemble des grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ associée à ce plan (figure 5).

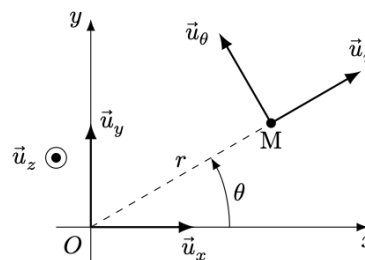


Figure 5

Q 12. Montrer que le mouvement du satellite est uniforme.

Q 13. Déterminer l'expression de la vitesse orbitale du satellite v_0 sur son orbite circulaire en fonction de la constante de gravitation universelle G et des paramètres M_T , R_T et h .

Q 14. Évaluer numériquement la vitesse v_0 , ainsi que la période de révolution T_0 correspondante.

Pour appréhender la difficulté à communiquer avec les satellites de basse altitude directement depuis la surface de la Terre, on peut se référer à un article publié sur le site Internet du journal Le Monde le 13 janvier 2017, intitulé « Comment communique-t-on en direct avec l'ISS ? ». Dans cet article, publié lors du premier séjour de l'astronaute Thomas Pesquet à bord de la Station Spatiale Internationale (ISS), on peut lire l'extrait suivant.

« La Station Spatiale Internationale (ISS) étant sur une orbite basse, elle survole la surface terrestre d'assez près (environ 400 kilomètres). À cette altitude, la vitesse orbitale est très rapide (environ 27 500 km/h, soit 7,6 km par seconde), rendant toute communication radio directe avec le sol impossible à établir plus d'une minute. La communication avec l'ISS passe donc par des satellites relais positionnés très haut, sur une orbite dite « géostationnaire », à 36 000 kilomètres d'altitude, qui permet aux satellites qui y sont de rester au-dessus d'un point de la surface terrestre de façon fixe. [...] Ces satellites servent de relais de communication aussi bien pour des équipages humains que pour de nombreux satellites placés sur une orbite basse qui ont également besoin de communiquer avec les équipes au sol. »

Q 15. Discuter quantitativement l'affirmation selon laquelle « la vitesse orbitale [rend] toute communication radio directe avec le sol impossible à établir plus d'une minute ».

II.B – Communication avec les satellites relais

Vis-à-vis de la propagation des ondes électromagnétiques, les premières couches de l'atmosphère peuvent être assimilées au vide. À partir de 80 km d'altitude, dans l'ionosphère, il y a présence d'un gaz ionisé, très dilué, appelé plasma. Le vide et le plasma ont pour permittivité diélectrique ϵ_0 et pour perméabilité magnétique μ_0 .

II.B.1) Propagation dans le vide

L'onde de communication envoyée depuis la surface de la Terre vers le satellite est supposée plane, progressive selon l'axe (Ox) et harmonique de pulsation ω et de vecteur d'onde $k\vec{u}_x$. En notation complexe, son champ électrique s'écrit

$$\vec{E}(M, t) = E_0 \exp(i(\omega t - kx)) \vec{u}_y$$

où $i^2 = -1$ et E_0 est un nombre qui peut être supposé réel grâce à un choix judicieux de l'origine des temps.

Q 16. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide et établir l'équation de propagation du champ électrique dans le vide, en l'absence de charge et de courant.

Q 17. Établir la relation de dispersion de l'onde de champ électrique complexe $\underline{\vec{E}}(M, t)$ dans le vide. Le vide est-il un milieu dispersif ?

Q 18. Déterminer, en notation complexe, le champ magnétique $\underline{\vec{B}}(M, t)$ associé au champ électrique $\underline{\vec{E}}(M, t)$.

II.B.2) Propagation dans le plasma

L'onde de communication doit ensuite traverser l'ionosphère. Le plasma ionosphérique se caractérise par une densité volumique d'électrons libres n_e de charge $-e$, de masse m_e , et une densité volumique de cations $n_c = n_e$ de charge $+e$, de masse m_c ; l'ensemble est donc localement neutre. L'onde étudiée est maintenant notée

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = E_0 \exp(i(\omega t - \underline{k}x)) \underline{u}_y$$

où on pose $\underline{k} = k' + ik''$. On considère que $n_c, n_e, E_0, \omega, k'$ et k'' sont réels, uniformes et constants. De plus, on s'intéresse uniquement à la situation où $k' \geq 0$ et $k'' \leq 0$.

Dans le plasma, les électrons et les ions sont soumis à la force de Lorentz due aux champs électrique et magnétique de l'onde. On négligera toute autre action et on supposera, en outre, que les particules possèdent des vitesses très petites devant c .

Q 19. En admettant que le rapport des amplitudes du champ électrique et du champ magnétique dans le plasma soit assimilable à celui dans le vide, montrer que les effets de la partie magnétique de la force de Lorentz sont négligeables devant ceux de la partie électrique.

Q 20. En admettant que l'accélération d'un électron du plasma soit donnée par $\frac{\partial \underline{\vec{v}}_e}{\partial t}$, déterminer l'expression du vecteur vitesse complexe $\underline{\vec{v}}_e$ d'un électron, positionné en M à l'instant t , en fonction de m_e, e, ω et $\underline{\vec{E}}(M, t)$. De la même façon, donner l'expression du vecteur vitesse $\underline{\vec{v}}_c$ d'un cation. Que peut-on dire de $\|\underline{\vec{v}}_c\|$ par rapport à $\|\underline{\vec{v}}_e\|$?

Q 21. Justifier qu'il existe dans le plasma une densité de courant $\underline{\vec{j}}(M, t)$. En déduire, en utilisant les résultats précédents, que l'expression de la conductivité complexe du plasma notée $\underline{\gamma}$ s'écrit de façon approchée

$$\underline{\gamma} \simeq -i \frac{n_e e^2}{m_e \omega}.$$

Q 22. Calculer la puissance volumique moyenne fournie par le champ électromagnétique aux électrons libres. Commenter.

Q 23. Établir l'équation de propagation du champ $\underline{\vec{E}}(M, t)$ dans le plasma.

Q 24. En déduire l'expression de \underline{k}^2 dans le plasma. Mettre en évidence une pulsation caractéristique, dite pulsation plasma, notée ω_p dont on fournira l'expression en fonction des grandeurs utiles parmi c, e, ϵ_0, m_e et n_e .

On suppose dans un premier temps $\omega < \omega_p$.

Q 25. Expliciter l'expression de \underline{k} et en déduire les expressions des champs réels $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$. On fera apparaître une épaisseur caractéristique δ_p que l'on définira et que l'on exprimera en fonction de ω, ω_p et c .

Q 26. Représenter l'évolution spatiale à un instant quelconque des profils des champs électrique et magnétique de l'onde et décrire leur évolution temporelle.

Q 27. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé à cette onde. Caractériser l'onde obtenue. On suppose désormais que $\omega > \omega_p$.

Q 28. De la même façon que pour le premier cas, expliciter l'expression de \underline{k} . En déduire les expressions des champs réels $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$, puis établir l'expression de la valeur moyenne du vecteur de Poynting.

Q 29. Déterminer l'expression de la vitesse de phase v_φ ainsi que celle de la vitesse de groupe v_g en fonction de ω_p, ω et c . Tracer v_g et v_φ en fonction de ω . Le milieu est-il dispersif ? Comparer ces vitesses à c et commenter.

En réalité, la densité électronique n_e dans l'ionosphère varie dans le temps et en fonction de l'altitude. La figure 6 présente son évolution.

Q 30. Calculer la valeur numérique de la fréquence minimale que doit posséder l'onde pour atteindre un satellite relais géostationnaire à partir de la surface de la Terre. À quel domaine du spectre électromagnétique appartient cette fréquence ?

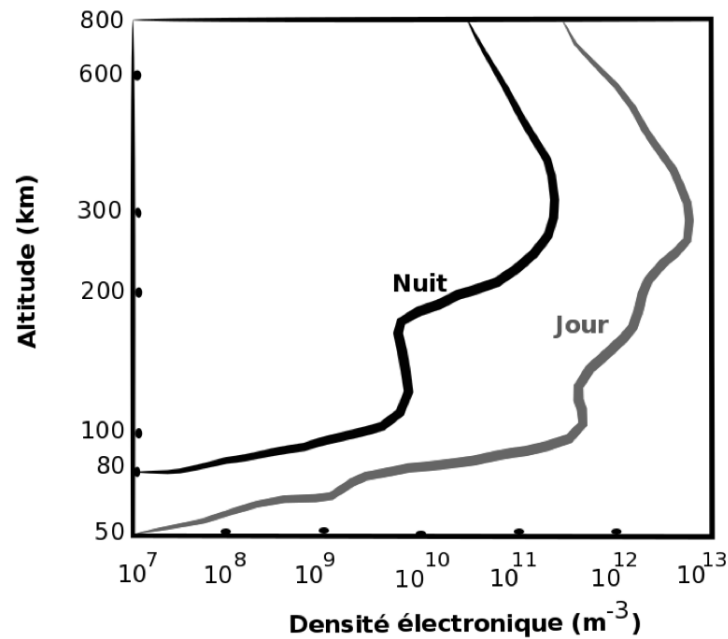


Figure 6 Évolution de la densité électronique dans l'ionosphère en fonction de l'altitude (d'après Culture Sciences - Physique, ENS Lyon)

Données

| | |
|----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Conductivité thermique du silicium | $\lambda_{\text{Si}} = 148 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ |
| Conductivité thermique de l'aluminium | $\lambda_{\text{Al}} = 237 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ |
| Conductivité thermique de l'acier | $\lambda_{\text{acier}} = 50 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ |
| Coefficient conducto-convectif air-métal (air statique) | $h_s = 30 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ |
| Coefficient conducto-convectif air-métal (air renouvelé) | $h_r = 300 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ |
| Prix du kW·h | 0,17 € |
| Constante des gaz parfaits | $R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ |
| Constante de la gravitation universelle | $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$ |
| Masse de la Terre | $M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$ |
| Rayon moyen de la Terre | $R_T = 6,40 \times 10^6 \text{ m}$ |
| Perméabilité magnétique du vide | $\mu_0 = 1,257 \times 10^{-6} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$ |
| Permittivité diélectrique du vide | $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$ |
| Vitesse de la lumière dans le vide | $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ |
| Charge élémentaire | $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$ |
| Masse de l'électron | $m_e = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$ |
| Masse du proton | $m_p = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$ |

Formulaire

$$\overline{\text{rot}(\text{rot } \vec{a})} = \overline{\text{grad}(\text{div } \vec{a})} - \Delta \vec{a}$$

Soit deux fonctions sinusoïdales f et g , scalaires ou vectorielles, de même période et d'écritures complexes respectives \underline{f} et \underline{g} . La valeur moyenne de la fonction $f \times g$, le symbole \times signifiant une opération de produit (scalaire ou vectoriel), vérifie la relation

$$\langle f \times g \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\underline{f} \times \underline{g}^*)$$

où Re désigne la partie réelle et \underline{g}^* le conjugué de la fonction complexe \underline{g} .