DM 3 Magnétostatique et mécanique

Lycée Thiers - Physique-Chimie - MPI/MPI*- 2026-2027

Travail demandé à rendre le 13/11/2026

Chaque étudiant rend une copie même s'il n'est pas interdit de chercher les exercices en groupe.

Problème I - Étude d'un diapason

Ce sujet est un extrait du sujet CCINP MP 2022.

Ce problème porte sur l'étude d'un oscillateur mécanique faiblement amorti très utilisé en musique le diapason.

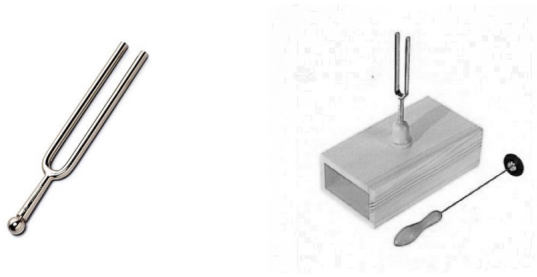


Figure 1 – Gauche : diapason de musicien. Droite : diapason (avec son marteau) muni d'une caisse de résonance pour améliorer l'émission sonore, utilisé dans l'enseignement

Partie I - Étude de la réponse percussionnelle

Les branches du diapason sont décrites comme un oscillateur masse-ressort oscillant selon un axe horizontal, amorti par frottement fluide linéaire en la vitesse.

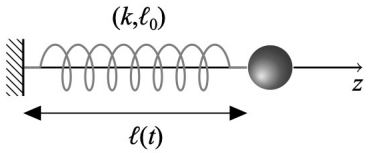


Figure 2 – Modélisation des branches du diapason par un oscillateur masse-ressort horizontal. La coordonnée z repère la position de la masselotte sur l'horizontale

On note m la masse de la masselotte, k la constante de raideur du ressort linéaire équivalent, ℓ_0 sa longueur à vide et $\ell(t)$ sa longueur à l'instant t (voir **figure 2**). De plus, on suppose que la masselotte est soumise à une force $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$.

Q1. Quel phénomène physique la force $\vec{f}$ modélise-t-elle ? Justifier par un argument énergétique le signe de la constante λ.

À l'instant $t = 0$, on percute l'une des branches du diapason, ce qui provoque la mise en mouvement de chaque branche. On suppose le choc instantané, c'est-à-dire que les branches pseudo-oscillent librement pour $t > 0$. Une note est alors émise.

Q2. On note $z(t) = \ell(t) - \ell_0$ la position de la masselotte. Établir l'équation différentielle dont $z(t)$ est solution pour $t > 0$.

Q3. Exprimer la fréquence propre et le facteur de qualité Q de ce système en fonction de k, m et λ.

Q4. Sachant que l'on obtient des pseudo-oscillations, établir l'expression littérale de $z(t)$ en fonction de k, m et λ et de constantes d'intégration que l'on ne cherchera pas à déterminer.

La masse de certains diapasons, utilisés par les musiciens, de fréquence propre voisine de 500 Hz vaut 30 g. Pour un diapason sans caisse de résonance, l'émission sonore est détectable à l'oreille pendant environ une trentaine de secondes.

Q5. Réaliser une estimation de la constante de raideur du ressort équivalent. De même, réaliser une estimation de la constante de raideur de ressorts utilisés en travaux pratiques. Commenter.

Q6. Proposer une estimation du facteur de qualité du diapason. Comparer cette valeur à celle d'un oscillateur masse-ressort de travaux pratiques.

Q7. Pour un oscillateur masse-ressort de travaux pratiques, dont la période propre vaut une seconde, indiquer s'il est correct d'affirmer que la durée entre deux maxima successifs de la position de la masselotte vaut effectivement 1,0 s. On s'appuiera sur une discussion numérique à partir d'un développement limité à l'ordre 1 de la pseudo-période en $1/Q^2$.

Q8. De même, est-il correct d'affirmer que les branches d'un diapason de fréquence propre f_0 oscillent à la fréquence f_0 après percussion ?

Pour préciser l'estimation précédente du facteur de qualité du diapason, on réalise un enregistrement à l'aide d'un microphone en utilisant un diapason équipé d'une caisse de résonance en bois permettant d'augmenter l'intensité de l'émission sonore (voir schéma du montage, **figure 3**). On obtient les deux enregistrements présentés sur le **document 1**.

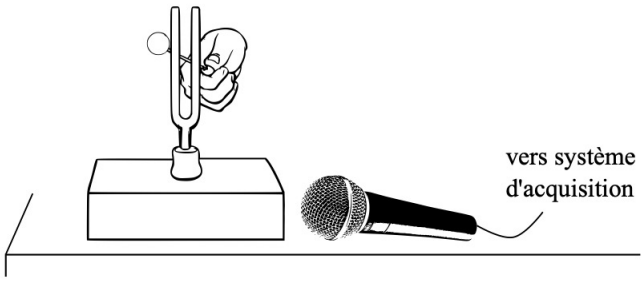
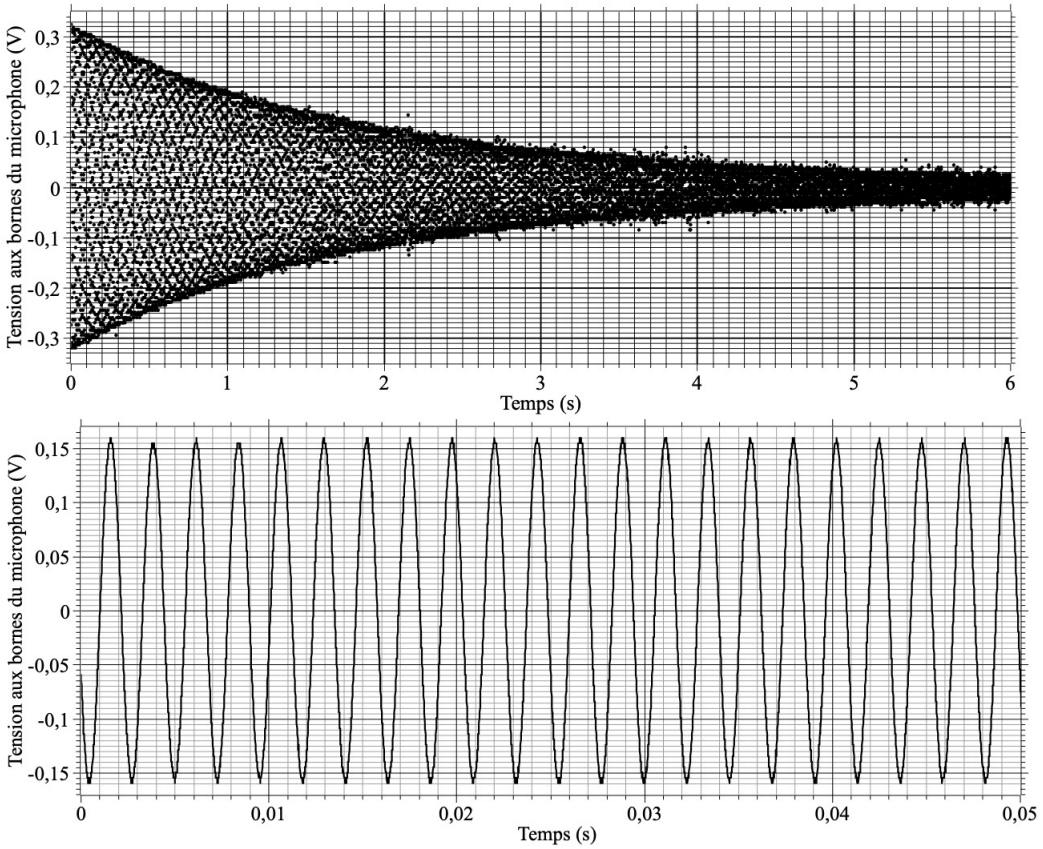


Figure 3 – Schéma du dispositif expérimental étudié dans la question 9

Q9. Exploiter le **document 1** pour estimer au mieux la fréquence propre et le facteur de qualité du diapason **A** (on reproduira sommairement la (ou les) figure(s) utilisées pour faire apparaître la méthode graphique employée pour ces déterminations). Comparer la valeur du facteur de qualité mesuré en présence de la caisse de résonance à celui du diapason en son absence. Commenter.

Document 1 - Étude de la réponse percussionnelle



Tension aux bornes d'un microphone enregistrant le son émis par la caisse de résonance du diapason **A** en réponse à une percussion avec le marteau (lors de deux mesures).

Partie II - Génération du champ excitateur

Un solénoïde long (longueur L, rayon R), d'axe Oz, parcouru par un courant d'intensité I et possédant n spires par unité de longueur est utilisé pour générer un champ magnétostatique $\overrightarrow{B}$ (voir **figure 4**).

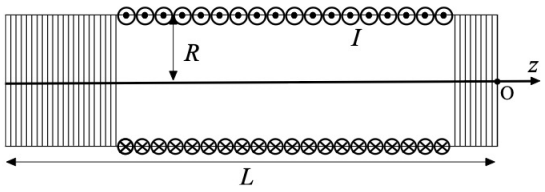


Figure 4 – Schéma du solénoïde

Q10. Dans l'approximation du solénoïde infini, justifier que le champ magnétostatique en tout point M à l'intérieur du solénoïde est de la forme :

$$\overrightarrow{B}(M) = B(r)\,\overrightarrow{u_z}$$

où r est la distance de M à la droite Oz et $\overrightarrow{u_z}$ le vecteur unitaire dirigeant l'axe Oz dans le sens des z croissants (voir **figure 4**).

Q11. Justifier que le champ magnétostatique est uniforme à l'intérieur du solénoïde infini. Établir son expression en admettant qu'il est nul à l'extérieur.

Q12. Estimer la norme B_0 de ce champ pour un bobinage de $1 \cdot 10^3$ spires·m^{-1} avec $I = 0{,}1$ A. Comparer cette valeur à l'ordre de grandeur de la valeur du champ magnétique terrestre.

Q13. Quel est l'intérêt d'avoir supposé le solénoïde infini ? À quelle(s) condition(s) cette approximation est-elle valide ?

On suppose maintenant que le courant $i(t) = I\cos(\omega t)$ parcourant les spires du solénoïde est lentement variable.

Q14. Rappeler et nommer les équations de Maxwell.

Q15. En admettant que l'expression du champ magnétique obtenue à la **question Q11** reste valide à condition de remplacer I par $i(t)$, justifier qu'en tout point M à l'intérieur du solénoïde, le champ électrique $\overrightarrow{E}(M,t)$ est de la forme :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = E(r,t)\,\overrightarrow{u_\theta}$$

dans la base cylindrique $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ d'axe Oz.

Q16. Montrer que $E(r,t) = E_0(r)\sin(\omega t)$. On précisera l'expression de $E_0(r)$ en fonction de I, μ_0, n, r et ω, puis en fonction de B_0, r et ω.

Problème II - La plateforme stabilisatrice Waverider

Ce sujet est extrait de l'épreuve de physique CCS MP 2022.

Le Waverider est muni d'un accéléromètre uniaxe qui mesure la projection de l'accélération $\vec{a}_W$ de la bouée sur une direction particulière $\vec{u}_z$. Cette direction est liée à l'accéléromètre : si celui-ci se réoriente dans l'espace, le vecteur $\vec{u}_z$ se modifie généralement et l'accéléromètre mesure la projection de $\vec{a}_W$ sur une nouvelle direction. Cependant, afin d'accéder à la hauteur des vagues, ce sont les accélérations *verticales* qu'il convient de mesurer et il est donc impératif que la direction sensible de l'accéléromètre, définie par le vecteur $\vec{u}_z$, demeure en permanence colinéaire à l'accélération de la pesanteur $\vec{g}$. Il s'agit d'une véritable gageure, car l'accéléromètre est embarqué dans une bouée sujette à des mouvements complexes provoqués par les vagues. Pour maintenir fixe l'orientation de l'accéléromètre malgré ces mouvements perturbateurs, celui-ci est placé sur une plateforme stabilisatrice pendulaire. Ce dispositif, protégé par des brevets, est au cœur de la technologie Waverider. La figure 3 montre une photographie et donne une description sommaire de la plateforme stabilisatrice.



Figure 3 Plateforme stabilisatrice

La plateforme stabilisatrice est enfermée dans une sphère transparente $\mathcal{S}$ (figure 3), elle-même placée dans la bouée. Attention à ne pas confondre la sphère $\mathcal{S}$ et la coque de la bouée qui est, elle aussi, grossièrement sphérique.

L'accéléromètre (non représenté) est solidaire d'un bloc en plastique $\mathcal{B}$ prolongé vers le bas par une tige du même matériau, elle-même traversée par une vis en métal $\mathcal{V}$ que l'on peut enfoncer plus ou moins pour la déplacer de droite à gauche. Dans sa partie supérieure, le bloc est évidé sur deux régions F_1 et F_1' et les cavités sont comblées avec un matériau moins dense. L'ensemble est fixé sur un disque $\mathcal{D}$ constituant la plateforme proprement dite, puis suspendu par un fil très fin au centre O de la sphère $\mathcal{S}$, lui-même lié rigidement à la paroi sphérique par une tige. La sphère est enfin remplie d'un liquide judicieusement choisi.

II.A – Flottabilité

Le principe d'Archimède, dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ supposé galiléen, peut s'exprimer ainsi.

> *Soit un fluide en équilibre dans le champ de pesanteur. Un corps immergé dans ce fluide subit de sa part des forces de pression dont la somme est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé (poussée d'Archimède). Cette poussée s'applique au centre de masse du fluide déplacé.*

Q 14. On considère un solide homogène de masse volumique ρ et de volume V entièrement immergé dans un liquide de masse volumique ρ_ℓ en équilibre dans le champ de pesanteur. Par une analyse des forces qu'il subit, discuter la propension de ce solide à remonter vers la surface pour y flotter ou, au contraire, à couler vers le fond.

Q 15. Toujours soumis au champ de pesanteur, le liquide est dans cette question en équilibre dans un référentiel $\mathcal{R}$ en translation rectiligne, d'accélération $\vec{a}_e$ par rapport à $\mathcal{R}_T$. Comment faut-il modifier le principe d'Archimède ?

II.B – Horizontalité statique de la plateforme

Les éléments F_1, F_1' et $\mathcal{V}$ ont pour rôle d'assurer l'horizontalité statique de la plateforme. Pour comprendre le principe du dispositif, on considère un système modèle Σ constitué de trois parties (figure 4) :

— un solide homogène S_0 de volume V_0, de centre de masse G_0, formé d'un matériau de masse volumique ρ_0, modélisant le bloc en plastique et le disque $\mathcal{D}$;

— un solide homogène S_1 de volume V_1, de centre de masse G_1 et de masse masse volumique $\rho_1 < \rho_0$, modélisant F_1 et F_1' ;

— un solide homogène S_2 de volume V_2, de centre de masse G_2 et de masse volumique $\rho_2 > \rho_0$, modélisant la vis $\mathcal{V}$ et les parties métalliques de l'accéléromètre.

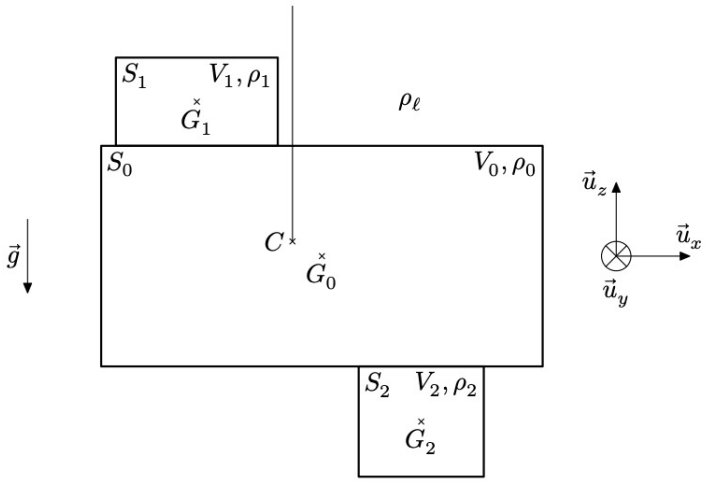


Figure 4 Modélisation de la plateforme par un système Σ en trois parties

L'ensemble est suspendu par un fil fixé en C et immergé dans le liquide, choisi de telle manière que sa masse volumique ρ_ℓ soit proche de ρ_0. Dans cette sous-partie seulement, nous prendrons $\rho_\ell = \rho_0$ pour simplifier, bien qu'un léger écart existe entre ces deux valeurs. On se limite à une description bidimensionnelle dans le plan de la figure 4 et on envisage une possible inclinaison du système Σ par rotation autour de l'axe $(C, \vec{u}_y)$, le fil restant toujours vertical (il ne touche le solide S_0 qu'en C).

On note $\vec{\Pi}_0$ (respectivement $\vec{\Pi}_1$ et $\vec{\Pi}_2$) la poussée d'Archimède appliquée en G_0 (respectivement G_1 et G_2) que subirait le solide immergé S_0 (respectivement S_1 et S_2) en l'absence des deux autres solides (le liquide l'entourant donc totalement).

On admet que la poussée d'Archimède due au liquide sur le système Σ peut être remplacée par les trois forces $\vec{\Pi}_0$, $\vec{\Pi}_1$ et $\vec{\Pi}_2$.

Q 16. Exprimer la résultante $\vec{R}$ et le moment $\vec{\Gamma}_C$ en C des forces de pression et de pesanteur que Σ subit en fonction des grandeurs judicieuses parmi ρ_ℓ, ρ_1, ρ_2, V_0, V_1, V_2, $\overrightarrow{CG_0}$, $\overrightarrow{CG_1}$, $\overrightarrow{CG_2}$ et $\vec{g}$.

Q 17. Les sous-systèmes S_1 et S_2 procurent respectivement à Σ une propension à flotter ou à couler. À quelle condition ces effets antagonistes se compensent-ils ? Exprimer la réponse sous la forme d'une relation entre ρ_ℓ, ρ_1, ρ_2, V_1 et V_2.

Q 18. La relation précédente est supposée satisfaite. Montrer que le moment en C des forces s'exerçant sur l'ensemble Σ s'exprime sous la forme

$$\vec{\Gamma}_C = M_m \overrightarrow{G_1G_2} \wedge \vec{g}$$

et donner l'expression de M_m en fonction de ρ_ℓ, ρ_2 et V_2.

Q 19. Proposer une situation électrostatique analogue à celle étudiée ici. En particulier, détailler cette analogie terme à terme pour la relation précédente.

Q 20. Déduire de la relation précédente l'orientation prise par le vecteur $\overrightarrow{G_1G_2}$ à l'équilibre stable de Σ. Vérifier la cohérence de la stabilité de l'équilibre à l'aide d'un ou de plusieurs dessins pertinents.

Q 21. En revenant au système réel de la figure 3, expliquer le rôle de la vis $\mathcal{V}$.

II.C – Oscillations du pendule et longueur effective

Dans cette sous-partie, on suppose la sphère $\mathcal{S}$ et le point O fixes dans $\mathcal{R}_T$ et on étudie un mouvement pendulaire de la plateforme $\mathcal{D}$ dans le cadre d'un modèle simplifié :

— La plateforme et ses accessoires sont remplacés par un solide Σ_0 quasi ponctuel de volume V_0 et de masse volumique ρ_0 immergé dans le liquide de masse volumique $\rho_\ell < \rho_0$, suspendu en O par un fil souple de longueur ℓ et de direction indiquée par un angle θ (figure 5).

— On utilise encore le principe d'Archimède pour exprimer la résultante des forces du liquide sur le solide Σ_0, malgré les mouvements de ceux-ci (on néglige donc notamment dans cette sous-partie toute force de frottement due au liquide sur le solide).

— On augmente l'inertie du solide Σ_0 pour tenir compte du fait qu'il entraine dans son déplacement du liquide qui se trouve autour de lui : pour ce faire, on affecte à Σ_0 une « masse effective » m_{eff} *uniquement pour le calcul de ses éléments cinétiques (quantité de mouvement, moment cinétique, énergie cinétique).* Cette masse effective est supposée constante et est bien supérieure à la masse réelle de la plateforme et de ses accessoires.

Attention : la « masse effective » n'intervient pas dans l'expression du poids de Σ_0 qui ne dépend que de sa masse *réelle* $\rho_0 V_0$.

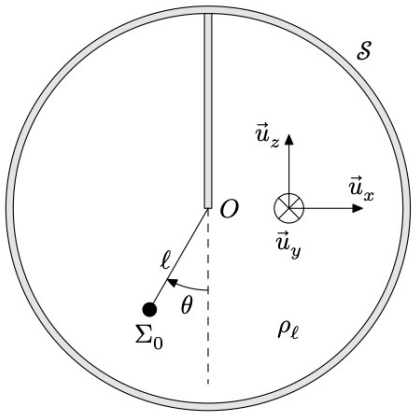


Figure 5 Modélisation de la plateforme en pendule simple (d'après l'orientation du vecteur $\vec{u}_y$, l'angle θ représenté sur cette figure est positif)

Q 22. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ dans l'approximation des petits angles. Identifier une pulsation propre ω_0 de la forme

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell_{\text{eff}}}}$$

et donner l'expression de ℓ_{eff} en fonction de ℓ, m_{eff} et de la masse apparente $m_{\text{app}} = (\rho_0 - \rho_\ell)V_0$.

Q 23. L'auteur du brevet original estime que le volume de fluide entrainé par le pendule est égal à $20V_0$ de sorte que $m_{\text{eff}} = \rho_0 V_0 + 20\rho_\ell V_0$. La masse volumique du liquide est de 1 % inférieure à ρ_0. Sous ces hypothèses, comparer la période propre T_0 du pendule à celle $T_{0\,\text{vide}}$ que l'on observerait en l'absence de liquide.

Q 24. Dans les brochures commerciales Datawell, on peut lire la phrase suivante : *La période propre d'oscillations de la plateforme est de l'ordre de 40 s, ce qui correspondrait à un pendule de 400 m.* Cette affirmation vous parait-elle cohérente ? Peut-on estimer la longueur réelle ℓ ?

II.D – Effet stabilisateur

On rappelle que la sphère de la figure 3 est embarquée dans une bouée. Sous l'effet de la houle, son centre O subit, en plus des accélérations verticales à mesurer, des accélérations horizontales perturbatrices.

Comme dans la sous-partie II.C, on représente la plateforme par un pendule simple et on étudie ses oscillations, repérées par l'angle θ. On envisage une situation dans laquelle le point de fixation O subit, par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ supposé galiléen, une accélération $\vec{a} = a(t)\vec{u}_x$. On raisonne dans le référentiel $\mathcal{R}_S$ d'origine O et dont les axes sont parallèles à ceux de $\mathcal{R}_T$. La poussée d'Archimède et l'effet de masse effective interviennent comme dans la sous-partie précédente et on prend de surcroît en compte une force de frottement visqueux $\overrightarrow{F_v} = -\beta\vec{v}$ sur le solide Σ_0 de vitesse $\vec{v}$.

Q 25. En tenant compte de la question 15, donner l'expression de la poussée d'Archimède. Quelle autre force s'exerçant sur le pendule faut-il considérer pour rendre compte du mouvement accéléré de $\mathcal{R}_S$ par rapport à $\mathcal{R}_T$? Dans l'expression de cette force, on fera intervenir la masse *réelle* $\rho_0 V_0$ de Σ_0 et non pas sa masse *effective*.

Q 26. Dans l'approximation des petits angles, démontrer que l'équation du mouvement du pendule est dorénavant de la forme

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{a(t)}{\ell_{\text{eff}}}$$

et donner l'expression du facteur de qualité Q en fonction de m_{eff}, β et ω_0.

On procède à une étude de la réponse harmonique du pendule.

L'accélération $a(t)$ est de la forme $a(t) = \text{Re}(a_0 e^{j\omega t})$ et on pose $\theta = \text{Re}(\underline{\theta}_m e^{j\omega t})$.

Q 27. Exprimer $\underline{\theta}_m$ en fonction de a_0, ℓ_{eff}, ω, ω_0 et Q.

On note θ_0 la valeur de $\underline{\theta}_m$ obtenue pour $\omega = 0$ puis on pose $\underline{H}(j\omega) = \underline{\theta}_m/\theta_0$.

Q 28. Donner l'expression de $\underline{H}$. À quel type de filtre une telle fonction de transfert est-elle associée ?

Q 29. Quelle expression $\underline{H}_1$ (en fonction de ω, g et ℓ) la fonction de transfert prendrait-elle si le pendule oscillait dans l'air, le liquide étant absent ? On néglige dans ce cas les effets de viscosité et tout autre phénomène dissipatif.

Le Waverider est conçu pour détecter une houle de fréquence comprise entre 0,03 et 1 Hz. La figure 6 représente la partie gain des diagrammes de Bode correspondant aux fonctions de transfert $\underline{H}$ et $\underline{H}_1$.

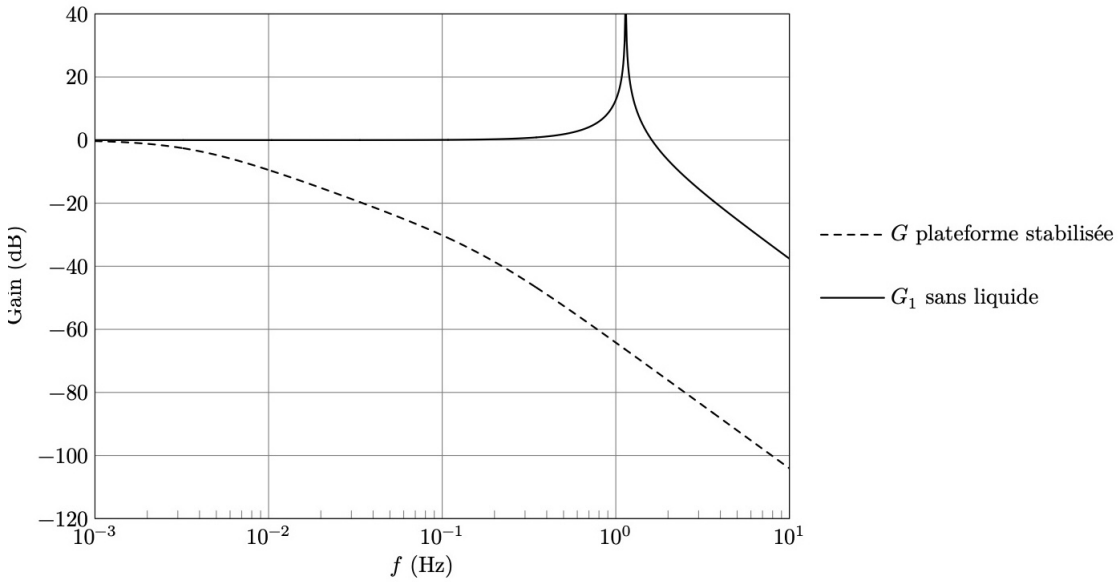


Figure 6 Diagrammes de Bode

Q 30. Commenter ces courbes. Quelle inclinaison maximale (en degrés) atteint-on si $a_0 = 1\ \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$?