

Travail demandé

à rendre le 10/10/2025

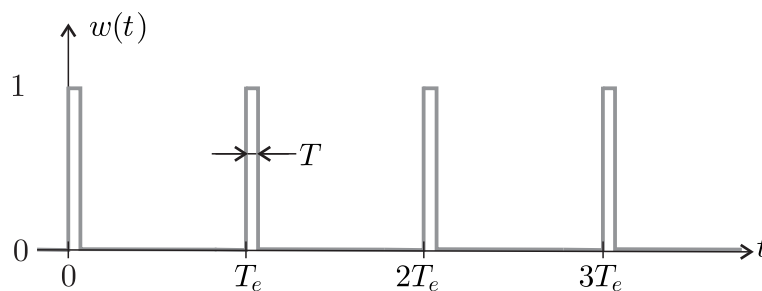
Chaque étudiant rend une copie même s'il n'est pas interdit de chercher les exercices en groupe.

Problème I - Analyse de Fourier et échantillonnage d'un signal électronique*Ce sujet est extrait du concours CCMP PSI 2022.*

Dans cette partie, on note $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ un signal sinusoïdal de fréquence f_0 que l'on cherche à numériser. Nous étudierons plus particulièrement l'une des étapes de la numérisation, appelée l'échantillonnage, qui consiste à prélever un ensemble de valeurs prises à des instants discrets.

I.1. On s'intéresse tout d'abord à l'opération consistant à multiplier le signal $x(t)$ par la fonction $p(t) = \cos(2\pi f_1 t)$, de fréquence $f_1 > f_0$. Représenter sur un même diagramme les spectres respectifs des signaux $x(t)$ et $x_e(t) = x(t) \times p(t)$.

On cherche maintenant à échantillonner le signal $x(t)$. Pour cela, on introduit la fonction périodique $w(t)$ représentée sur la figure 1 ci-dessous. On considère que $T \ll T_e$, ainsi le signal $x_e(t) = x(t) \times w(t)$ n'est différent de zéro que sur des intervalles de temps très courts assimilables à des instants discrets $t_k = kT_e$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Pour chacun de ces instants, on a $x_e(t_k) = x(t_k)$. On dit que $x_e(t)$ constitue un échantillonnage du signal $x(t)$ et on appelle fréquence d'échantillonnage la grandeur $f_e = 1/T_e$.

**Fig. 1** – Signal d'échantillonnage

I.2. Représenter le signal $x_e(t)$ pour $f_e = 4f_0$, $f_e = 2f_0$ et $f_e = 4f_0/3$. Montrer qualitativement que, dans l'un des cas, le signal échantillonné n'est pas représentatif du signal analogique de départ.

I.3. Du fait de sa périodicité, le signal $w(t)$ est décomposable en série de Fourier, de la forme

$$w(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_e t).$$

Représenter, par analogie avec la question 1, le spectre du signal $x_e(t) = x(t) \times w(t)$ pour $f_e = 4f_0$ puis $f_e = 4f_0/3$ (on se limitera aux valeurs de k telles que $0 \leq k \leq 2$). Montrer que, dans l'un des cas, les

motifs fréquentiels se chevauchent (on parle de repliement de spectre). En considérant seulement la fenêtre fréquentielle $[0, f_e]$, indiquer autour de quelle fréquence a lieu le repliement.

I.4. En s'inspirant des questions 2 et 3, proposer une relation entre f_e et f_0 permettant d'assurer un bon échantillonnage du signal $x(t)$. Cette relation est appelée « critère de Shannon-Nyquist ».

I.5. On considère dorénavant un signal temporel $X(t)$ dont le spectre en fréquence $X(f)$, représenté sur la figure 2, fait apparaître une fréquence maximale f_{\max} . Que devient le critère de Shannon-Nyquist dans cette situation ? Représenter le spectre du signal échantillonné selon que ce critère soit ou non vérifié. Pour un signal sonore audible, proposer des valeurs raisonnables de f_{\max} et f_e .

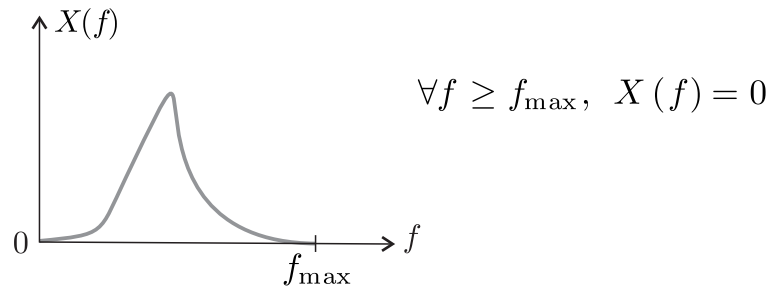


Fig. 2 – Le spectre du signal X est borné en fréquence.

I.6. Sur l'exemple de la question précédente montrer que, lorsque le critère de Shannon-Nyquist est vérifié, un filtrage approprié permet de retrouver le signal analogique de départ. On donnera les caractéristiques du filtre à utiliser.

I.7. La durée d'enregistrement d'un CD audio est de $t = 75$ min. L'échantillonnage se fait à une fréquence $f_e = 44.1$ kHz et avec résolution de 16 bits. De plus, l'enregistrement est fait sur deux voies séparées en stéréo. Déterminer la taille minimale du fichier musical. On donnera le résultat en mégaoctets (Mo), un octet correspondant à 8 bits.

Problème II - Disdromètre à impact avec piézoélectrique

Ce sujet est extrait de l'épreuve de physique CCINP MPI 2023.

Selon les précipitations, la taille des gouttes de pluie est très variable. La distribution des tailles de goutte, qui renseigne sur les événements météorologiques, doit souvent être mesurée. On utilise pour cela un disdromètre (« Distribution of Drops Meter »).

Partie III - Disdromètre à impact avec piézoélectrique

Ce disdromètre est un disdromètre à impact utilisant un capteur piézoélectrique (**photo 2**).

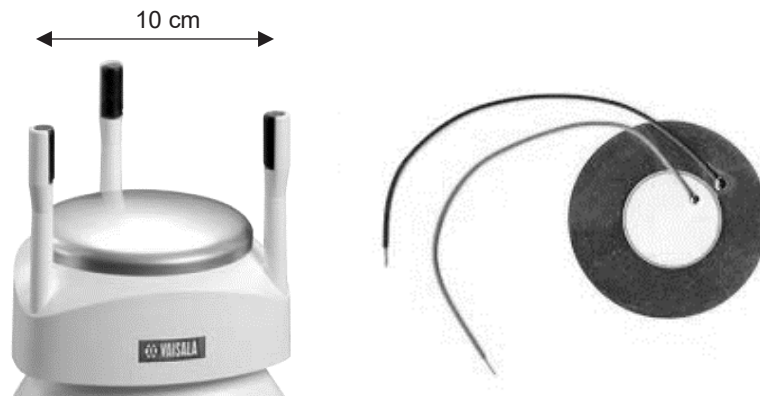


Photo 2 - (à gauche) Disdromètre Vaisala / (à droite) Capteur piézoélectrique

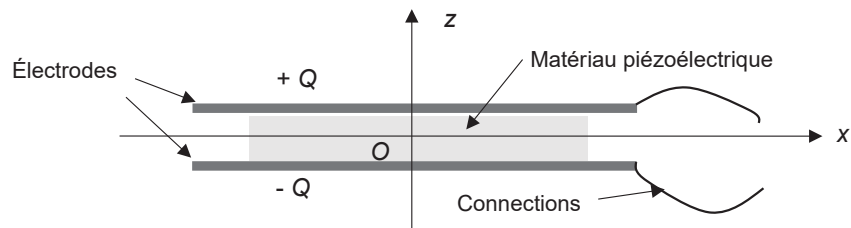


Figure 3 - Modélisation du capteur piézoélectrique

Les cristaux piézoélectriques, par exemple le quartz, génèrent une tension lorsqu'ils sont soumis à une contrainte mécanique et ils se déforment lorsqu'ils sont soumis à une tension électrique.

On modélise le capteur piézoélectrique par l'ensemble de deux électrodes planes de surface S chargées $+Q$ et $-Q$ et séparées par le matériau piézoélectrique, d'épaisseur e (**figure 3**).

On considère tout d'abord l'électrode chargée $+Q$: on la modélise par un plan infini d'épaisseur nulle, situé en $z = e/2$ et on cherche le champ électrostatique \vec{E} créé par cette distribution placée dans le vide.

Q9. En étudiant les symétries, puis les invariances de la distribution, donner la direction du champ électrique $\vec{E}(M)$ en un point M quelconque de l'espace et les coordonnées dont ce champ dépend.

Q10. En utilisant un théorème d'électromagnétisme à énoncer, calculer le champ électrique créé par cette distribution en tout point de l'espace.

Q11. En déduire l'expression du champ électrique $\vec{E}(M)_{\text{vide}}$ créé par l'association des deux électrodes chargées $+Q$ et $-Q$, en un point M entre les deux électrodes s'il y avait le vide. Dans un matériau ayant une permittivité ε , on remplace la permittivité diélectrique du vide par ε . En déduire le champ $\vec{E}(M)_{\text{piezo}}$ à l'intérieur du matériau piézoélectrique.

Problème III - Traitement des fumées industrielles par un électrofiltre

Ce sujet est extrait du concours CCS PSI 2017.

Les poussières, petites particules en suspension dans l'air, sont des polluants fréquemment présents dans les fumées industrielles. Leur émission est soumise à une réglementation toujours plus stricte qui oblige les industriels à équiper leurs installations de dispositifs de dépoussiérage. Les électrofiltres peuvent jouer ce rôle dans des installations aussi variées que les centrales thermiques, les cimenteries, les incinérateurs, les aciéries ou encore les verreries.

Un électrofiltre est essentiellement constitué de deux électrodes entre lesquelles on applique une forte tension électrique. L'une d'elles, appelée collectrice, est mise à la terre alors que l'autre, nommée émettrice, est portée à un potentiel négatif $-U$ provoquant l'ionisation du gaz à son voisinage. Les anions ainsi produits se déplacent vers la collectrice, correspondant au passage d'un courant au travers du gaz. En chemin, certains de ces anions se fixent sur les grains de poussière qui acquièrent ainsi une charge négative. Ces particules polluantes sont alors attirées par la collectrice et s'y fixent en formant un dépôt qu'on élimine en ébranlant l'électrode à coups de marteau (électrofiltre sec) ou en la rinçant par un liquide (électrofiltre humide). Le résidu est récupéré dans des trémies, puis évacué.

Dans les électrofiltres secs, les émettrices sont des fils verticaux et les collectrices des plaques verticales entre lesquelles la fumée à dépoussiérer s'écoule horizontalement (partie gauche de la figure 3). Dans les électrofiltres humides, l'émettrice est un fil vertical et la collectrice un cylindre coaxial, la fumée s'écoulant selon l'axe de ce tube (partie droite de la figure 3).

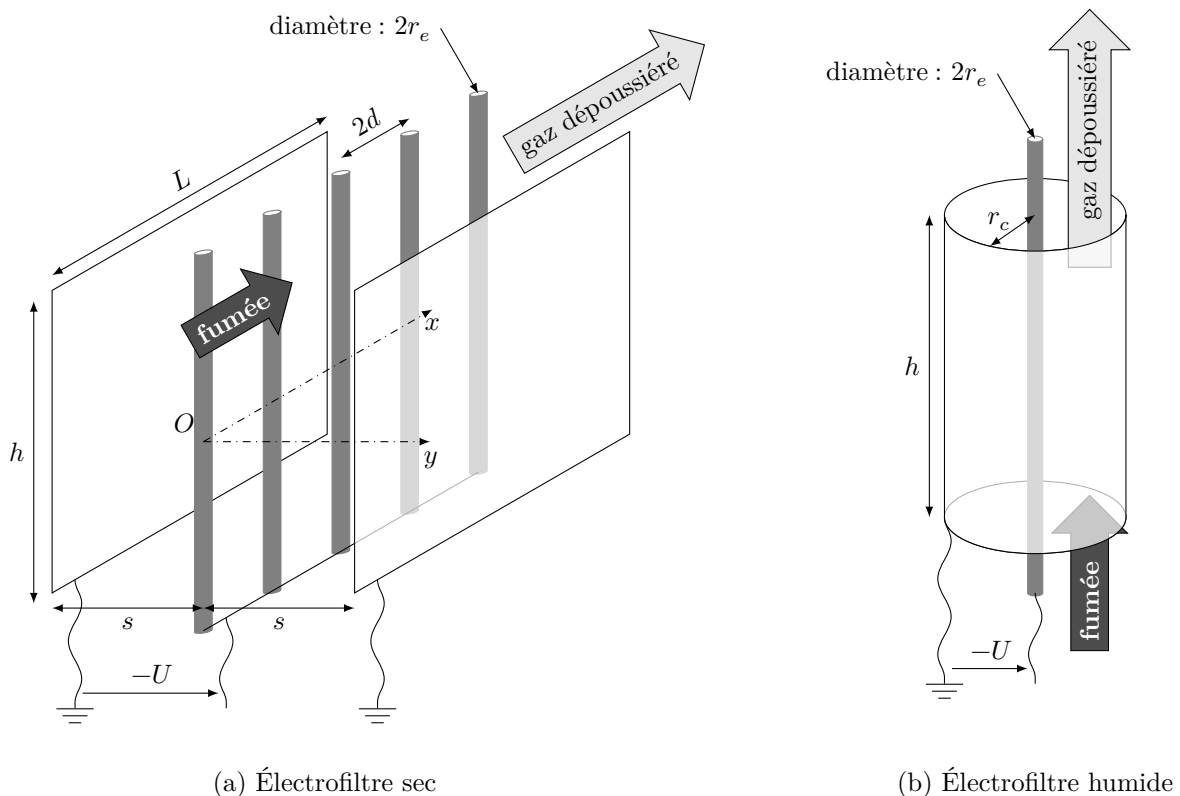


Fig. 3 – Deux types d'électrofiltres

Ce sujet est accompagné d'un document réponse à rendre avec la copie. Une liste de valeurs numériques et de formules figure en fin d'énoncé.

III.1. Champ électrique dans un électrofiltre

a - Champ électrique à vide et tension seuil

Selon des données expérimentales, l'ionisation du gaz au voisinage de l'émettrice se produit lorsque la norme du champ électrique y dépasse une valeur seuil E_0 dépendant du rayon r_e de cette électrode, de la

pression et de la température. Dans tout le problème, $r_e = 1.25 \text{ mm}$ et $E_0 = 4.4 \times 10^6 \text{ V/m}$.

III.1. Pour une configuration donnée des électrodes, le champ électrique \vec{E} et le potentiel électrostatique V dans l'espace inter-électrode dépendent de la tension U imposée. Pour les déterminer, on se place à la limite d'apparition du courant ce qui conduit à supposer l'espace inter-électrode vide de charge. Dans ces conditions, comment s'écrit l'équation de Poisson ?

Électrofiltre humide

III.2.a. On considère tout d'abord l'électrofiltre humide, tubulaire (figure 3b). Le rayon de la collectrice portée à la masse est noté r_c . En choisissant un système de coordonnées bien adapté et en négligeant les effets de bord, de quelles variables le potentiel électrostatique V dépend-il ? Donner son expression en fonction de U , r_e et r_c .

b. Exprimer le champ électrique au contact de l'émettrice et en déduire la valeur U_0 à donner à U pour qu'il atteigne la valeur E_0 .

c. Calculer numériquement U_0 pour $r_c = 150 \text{ mm}$.

Électrofiltre sec

On raisonne toujours sous les hypothèses de la question 1, mais on considère désormais un électrofiltre sec formé de plaques et de fils, caractérisé par les distances s et d définies sur la figure 3a. L'origine des coordonnées est placée sur l'un des fils, à égale distance des deux collectrices. Tout effet de bord étant négligé, le potentiel électrostatique est donné par

$$V(x, y, z) = \frac{U}{\Lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{\cosh \left(\frac{\pi(x - 2md)}{2s} \right) - \cos \left(\frac{\pi y}{2s} \right)}{\cosh \left(\frac{\pi(x - 2md)}{2s} \right) + \cos \left(\frac{\pi y}{2s} \right)} \right)$$

III.3.a. Vérifier que cette expression est compatible avec la présence des collectrices et trouver l'expression de Λ en fonction de d , s et r_e .

b. Les équipotentielles sont représentées sur la figure 7 du document réponse. Compléter cette figure en y traçant en couleur des lignes de champ orientées. Quelles sont les zones de fort champ ? Existe-t-il des points où le champ électrique s'annule ?

c. La figure 4 montre le comportement de $|E_y(x = 0, y, z = 0)|$ en fonction de y . Ce graphique, obtenu pour $d/s = 4/3$, utilise les variables adimensionnées $|E_y|/(U/s)$ (en ordonnée) et y/s (en abscisse).

Quelle valeur U_0 faut-il donner à U pour provoquer l'ionisation près de l'électrode émettrice ? Exprimer la réponse en fonction de s et E_0 , puis estimer la valeur numérique de U_0 pour $s = 150 \text{ mm}$. Comparer l'ordre de grandeur obtenu avec celui concernant l'électrofiltre tubulaire.

b - Influence des charges d'espace

Dès lors que la tension U dépasse la valeur seuil U_0 , un courant d'intensité i s'instaure dans l'électrofiltre et l'espace inter-électrode se peuple d'anions dont la présence, caractérisée par les densités volumiques de charge $\rho(M)$ et de courant $\vec{j}(M)$, modifie le champ électrique. Ces anions sont supposés tous identiques et se déplacent dans le champ électrique $\vec{E}(M)$ avec une vitesse $\vec{v}(M) = -b\vec{E}(M)$ avec $b = 3.1 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ dans les conditions envisagées.

La connaissance des champs couplés $\vec{E}(M)$ et $\rho(M)$ constitue un enjeu majeur car ces grandeurs déterminent la migration des grains de poussière. Dans un électrofiltre sec, leur détermination s'appuie sur de lourdes méthodes numériques. Nous l'abordons ici uniquement dans le cas des électrofiltres humides en négligeant tout effet de bord. L'influence des poussières mobiles sur le champ est négligée.

III.4. La collectrice tubulaire et l'émettrice coaxiale ont pour hauteur h . On note $j = \vec{j} \cdot \vec{e}_r$ et $E = \vec{E} \cdot \vec{e}_r$ les projections sur le vecteur unitaire radial usuel des coordonnées cylindriques et r la distance d'un point à l'axe.

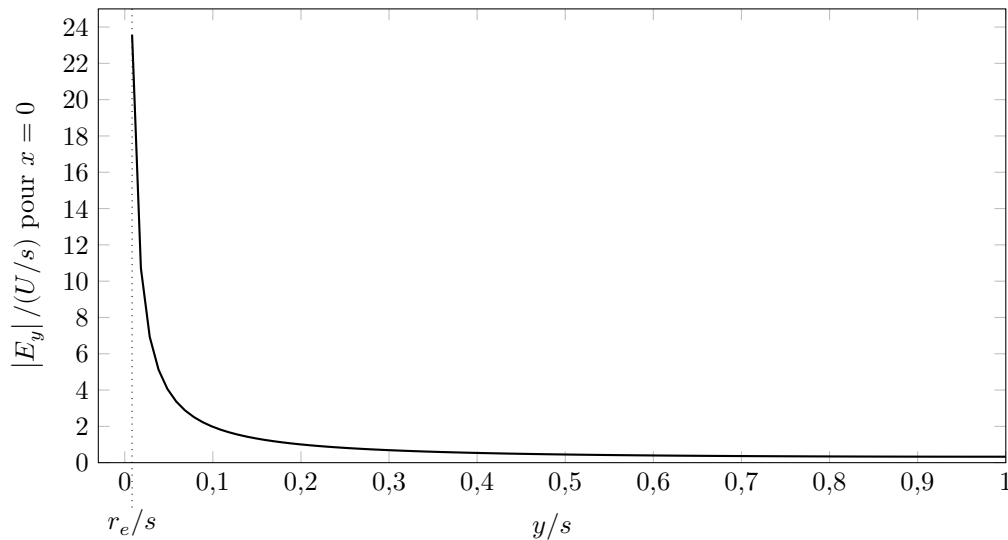


Fig. 4 – Variations du champ électrique dans un électrofiltre sec

Un courant d'intensité $i > 0$ circule radialement d'une électrode vers l'autre. Dans quel sens ? Exprimer j en fonction des variables qui s'imposent.

III.5. Exprimer la densité volumique de charge en fonction de i , E , h , r et b .

III.6. Quelle équation de l'électromagnétisme exprime localement la modification du champ électrique par les ions ? Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$rE \frac{d(rE)}{dr} = \frac{ir}{2\pi h \epsilon_0 b}$$

III.7. À une certaine distance $r_0 > r_e$ de l'axe, le champ électrique prend la valeur E_0 . En déduire l'expression de E .

III.8. Pour r suffisamment grand (quelques centimètres en pratique), on considère généralement que le champ devient grossièrement uniforme. Quelle est alors son expression approchée ? Quelle est ici sa valeur numérique si $i/h = 0.70 \text{ mA/m}$?

III.9. Dans cette région de quasi-uniformité, calculer la vitesse des ions, puis la densité volumique de charge ρ et le nombre d'ions par centimètre cube au voisinage de la collectrice ($r = r_c$), en supposant que chacun porte une charge élémentaire.

III.2. Charge d'une particule sphérique : modèle de Pauthenier

On aborde dans cette partie le processus de chargement des poussières, assimilées à des sphères de diamètre $d = 2a$. Ces grains sont initialement neutres mais les anions mobiles le long des lignes de champ les rencontrent et s'y fixent, leur communiquant progressivement une charge $Q(t) < 0$. Le champ \vec{E} étudié dans la partie précédente est désormais supposé uniforme et connu. Chaque grain de poussière chargé et polarisé sous l'influence de \vec{E} déforme localement les lignes de champ. Pour éviter toute confusion, on note \vec{E}_t le champ tenant compte simultanément de \vec{E} et de la présence des grains.

On raisonne sur un grain unique immobile et on adopte momentanément un nouveau système de coordonnées (r, θ, φ) de type sphérique, dont l'origine se situe au centre du grain et tel que $\vec{E} = E \vec{u}_z$ avec $E < 0$ (figure 5). Des considérations d'électrostatique montrent que, à l'extérieur du grain ($r \geq a$), le champ électrique total est donné par

$$\vec{E}_t = \vec{E} + E \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \frac{a^3}{r^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta) + \vec{E}_1$$

Dans cette expression, \vec{E}_1 désigne le champ que créerait autour d'elle la particule sphérique portant Q si elle était seule dans l'espace. La constante sans dimension ϵ_r dépend de la nature physico-chimique de

la poussière. Les lignes de champ sont tracées sur la figure 7 du document réponse pour $Q = 0$ puis pour une valeur négative de Q .

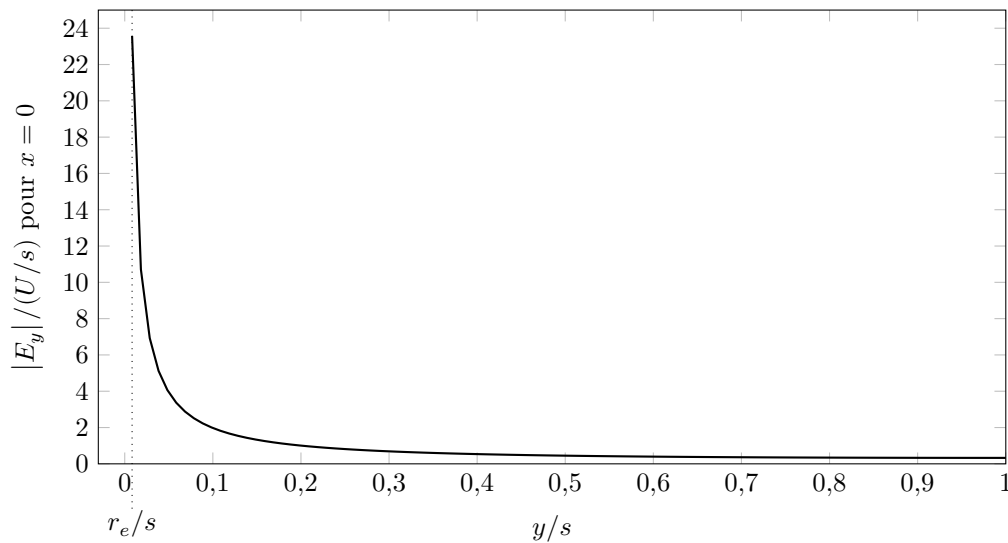


Fig. 5 – Variations du champ électrique dans un électrofiltre sec

a - Calcul de la charge limite

III.10. Orienter par des flèches bleues les lignes de champ de la figure 7 du document réponse et représenter le mouvement des anions par des flèches rouges. On précise que les lignes de champ qui rencontrent la sphère en la pénétrant ne portent pas d'anions : la sphère peut capturer des anions mais ne peut pas en émettre.

III.11. Quelle est l'expression de \vec{E}_1 ? L'accroissement de $|Q|$ a-t-il tendance à réduire ou à élargir la portion de la sphère d'où *partent*, vers des valeurs croissantes de r , les lignes de champ ? Favorise-t-il ou s'oppose-t-il à l'arrivée de nouveaux anions sur la sphère ?

III.12. Le grain de poussière atteint sa charge limite Q_{lim} lorsque les lignes de champ sont si distordues qu'aucun anion ne peut plus lui parvenir. Montrer que

$$Q_{\text{lim}} = 4\pi\varepsilon_0 a^2 E \left(1 + 2 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \right)$$

III.13. Calculer numériquement Q_{lim} pour $\varepsilon_r = 10$, $d = 2a = 2.0 \mu\text{m}$, $|E| = 5.0 \times 10^5 \text{ V/m}$. Combien de charges élémentaires cela représente-t-il ?

b - Loi horaire et durée de chargement

Le mécanisme décrit dans la question précédente est régi par la loi horaire

$$Q(t) = Q_{\text{lim}} \frac{t}{t + \tau_Q}$$

III.14. Sachant que τ_Q ne dépend que de ε_0 , b et $|\rho|$ (où ρ est la densité volumique de charge des anions), en donner une expression par analyse dimensionnelle. Le résultat exact s'obtient en plaçant un facteur 4 au numérateur.

III.15. Calculer numériquement la durée t_{90} au bout de laquelle un grain de poussière atteint 90% de sa charge limite pour $b = 3.1 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ et $|\rho| = 5.0 \times 10^{-5} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$.

III.16. La fumée poussiéreuse s'écoule à la vitesse $u_0 = 1 \text{ m/s}$ en traversant l'électrofiltre sur toute sa longueur $L = 10 \text{ m}$. Quelle conclusion peut-on tirer de la valeur numérique de t_{90} ?

Analyse vectorielle

En coordonnées cylindriques

$$\operatorname{div} \vec{A}(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\Delta \psi(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

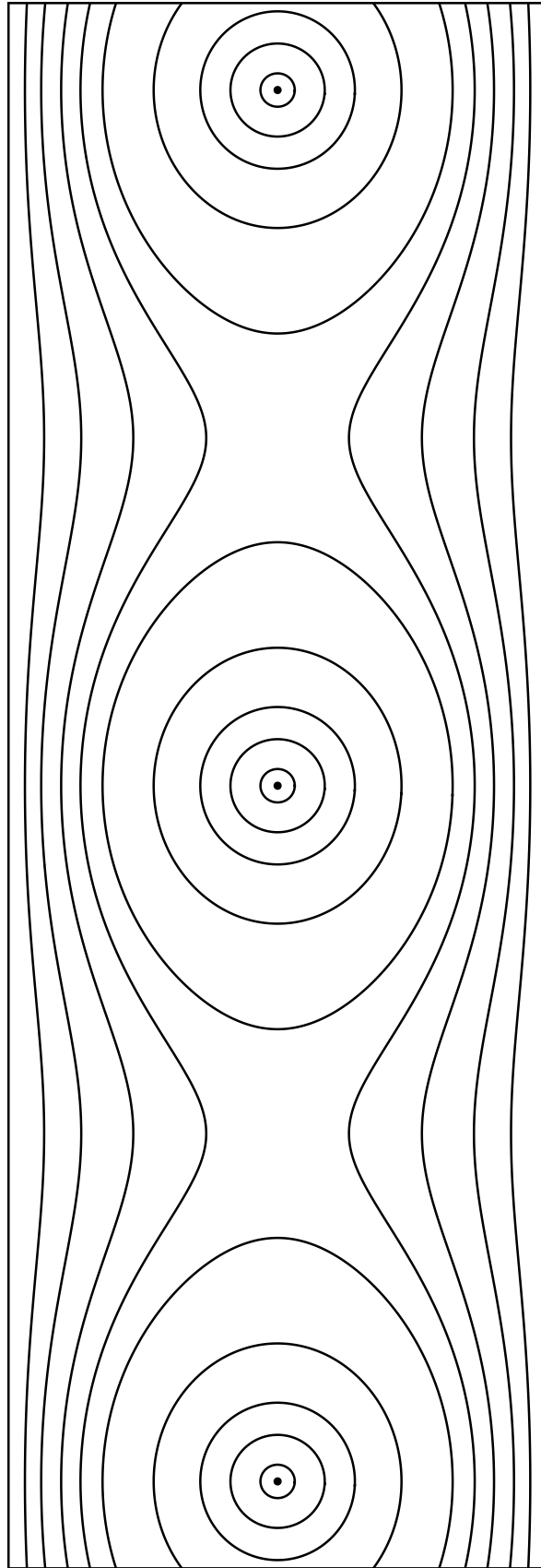
$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{A}(r, \theta, z) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

Données numériques

- ▷ Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$;
- ▷ Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$;
- ▷ Charge élémentaire : $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$.

Document réponse :

À rendre avec la copie

**Fig. 6** – Carte des équipotentiels dans un électrofiltre sec

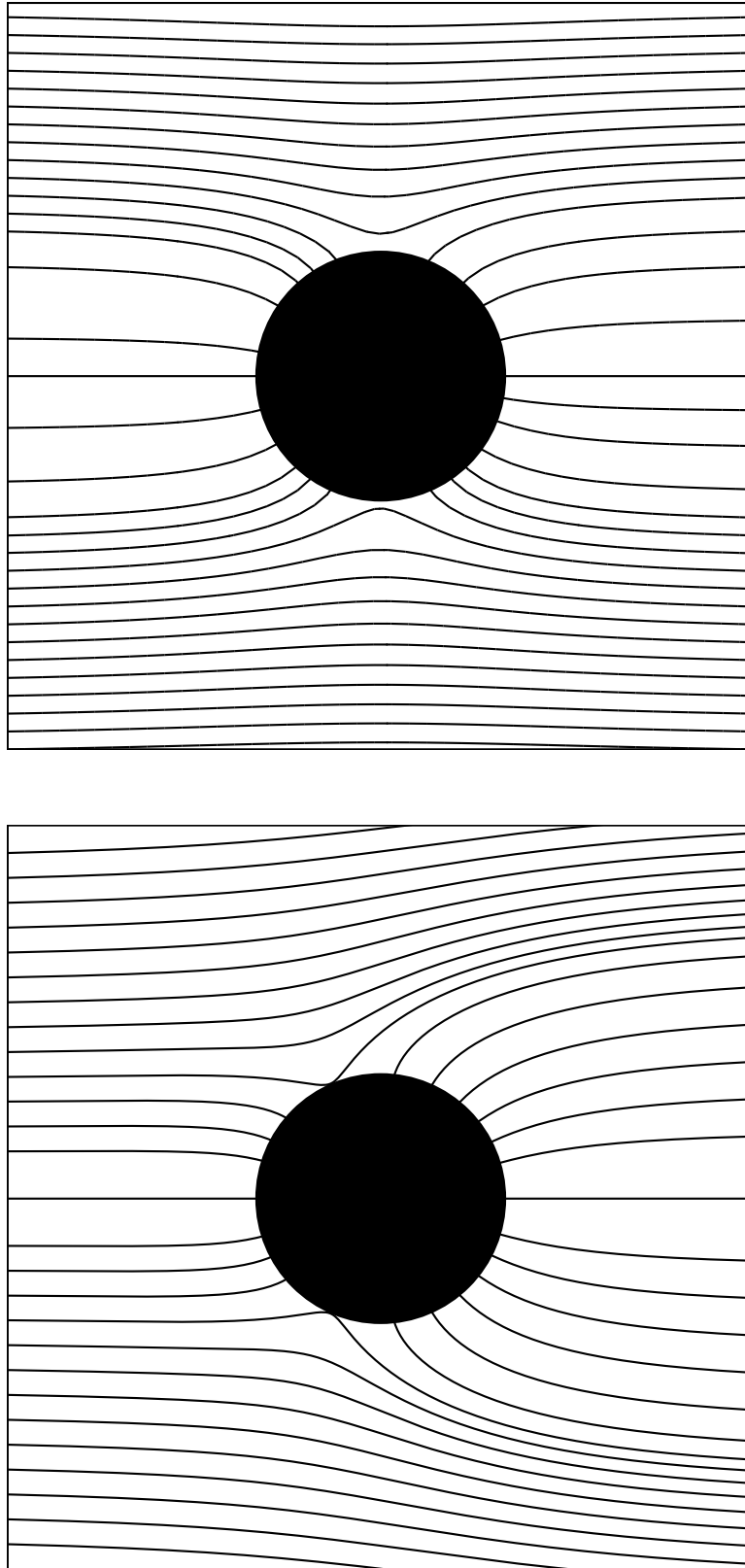


Fig. 7 – Lignes de champ autour d'un grain de poussière pour $Q = 0$ (en haut) et pour $Q < 0$ (en bas)