DM 2 Signal et électrostatique

Lycée Thiers - Physique-Chimie - MPI/MPI*- 2026-2027

Travail demandé à rendre le 09/10/2026

Chaque étudiant rend une copie même s'il n'est pas interdit de chercher les exercices en groupe.

Problème I - Analyse de Fourier et échantillonnage d'un signal électronique

Ce sujet est extrait du concours CCMP PSI 2022.

Dans cette partie, on note $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ un signal sinusoïdal de fréquence f_0 que l'on cherche à numériser. Nous étudierons plus particulièrement l'une des étapes de la numérisation, appelée l'échantillonnage, qui consiste à prélever un ensemble de valeurs prises à des instants discrets.

I.1. On s'intéresse tout d'abord à l'opération consistant à multiplier le signal $x(t)$ par la fonction $p(t) = \cos(2\pi f_1 t)$, de fréquence $f_1 > f_0$. Représenter sur un même diagramme les spectres respectifs des signaux $x(t)$ et $x_e(t) = x(t) \times p(t)$.

On cherche maintenant à échantillonner le signal $x(t)$. Pour cela, on introduit la fonction périodique $w(t)$ représentée sur la figure 1 ci-dessous. On considère que $T \ll T_e$, ainsi le signal $x_e(t) = x(t) \times w(t)$ n'est différent de zéro que sur des intervalles de temps très courts assimilables à des instants discrets $t_k = kT_e$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Pour chacun de ces instants, on a $x_e(t_k) = x(t_k)$. On dit que $x_e(t)$ constitue un échantillonnage du signal $x(t)$ et on appelle fréquence d'échantillonnage la grandeur $f_e = 1/T_e$.

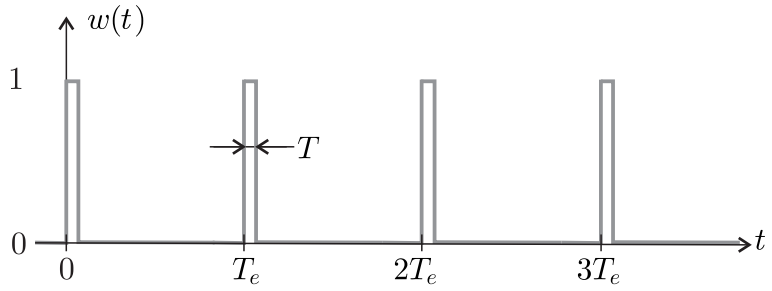


Fig. 1 – Signal d'échantillonnage

I.2. Représenter le signal $x_e(t)$ pour $f_e = 4f_0$, $f_e = 2f_0$ et $f_e = 4f_0/3$. Montrer qualitativement que, dans l'un des cas, le signal échantillonné n'est pas représentatif du signal analogique de départ.

I.3. Du fait de sa périodicité, le signal $w(t)$ est décomposable en série de Fourier, de la forme

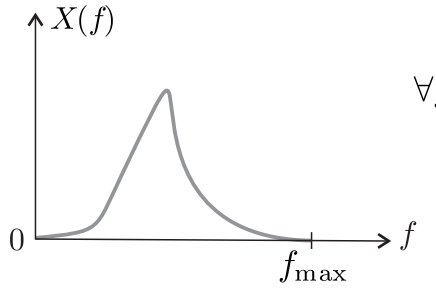
$$w(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_e t) \ .$$

Représenter, par analogie avec la question 1, le spectre du signal $x_e(t) = x(t) \times w(t)$ pour $f_e = 4f_0$ puis $f_e = 4f_0/3$ (on se limitera aux valeurs de k telles que $0 \leq k \leq 2$). Montrer que, dans l'un des cas, les

motifs fréquentiels se chevauchent (on parle de repliement de spectre). En considérant seulement la fenêtre fréquentielle $[0, f_e]$, indiquer autour de quelle fréquence a lieu le repliement.

I.4. En s'inspirant des questions 2 et 3, proposer une relation entre f_e et f_0 permettant d'assurer un bon échantillonnage du signal $x(t)$. Cette relation est appelée « critère de Shannon-Nyquist ».

I.5. On considère dorénavant un signal temporel $X(t)$ dont le spectre en fréquence $X(f)$, représenté sur la figure 2, fait apparaître une fréquence maximale f_{max}. Que devient le critère de Shannon-Nyquist dans cette situation ? Représenter le spectre du signal échantillonné selon que ce critère soit ou non vérifié. Pour un signal sonore audible, proposer des valeurs raisonnables de f_{max} et f_e.



$$\forall f \geq f_{\max}, \quad X(f) = 0$$

Fig. 2 – Le spectre du signal X est borné en fréquence.

I.6. Sur l'exemple de la question précédente montrer que, lorsque le critère de Shannon-Nyquist est vérifié, un filtrage approprié permet de retrouver le signal analogique de départ. On donnera les caractéristiques du filtre à utiliser.

I.7. La durée d'enregistrement d'un CD audio est de $t = 75\,\text{min}$. L'échantillonnage se fait à une fréquence $f_e = 44.1\,\text{kHz}$ et avec résolution de 16 bits. De plus, l'enregistrement est fait sur deux voies séparées en stéréo. Déterminer la taille minimale du fichier musical. On donnera le résultat en mégaoctets (Mo), un octet correspondant à 8 bits.

Problème II - Les besoins en eau du pin maritime (ou pin des Landes)

Ce sujet est extrait de l'épreuve de physique CCINP MPI 2024.

La forêt des Landes de Gascogne est un massif forestier du Sud-Ouest de la France situé en Nouvelle-Aquitaine (**figure 1**). Bordée à l'Ouest par l'océan Atlantique (la Côte d'Argent), elle forme un vaste triangle d'une superficie de plus d'un million d'hectares, qui s'étend sur trois départements (la Gironde, les Landes et le Lot-et-Garonne).

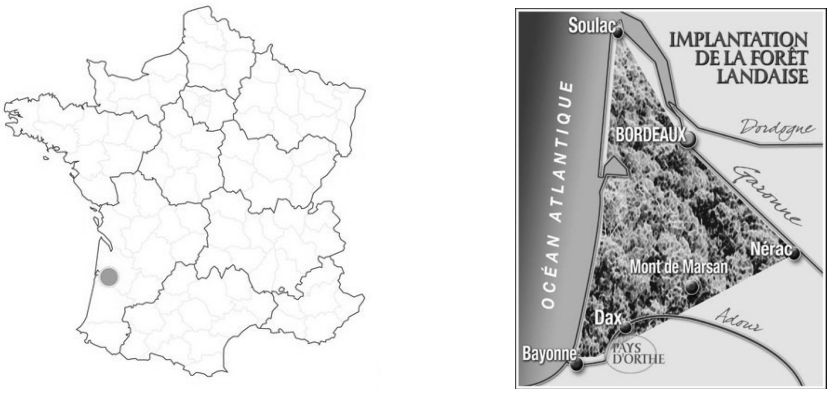


Figure 1 - Position géographique des Landes de Gascogne et de sa forêt (www.centreculturelduPaysdorthe.com)

Cette forêt a été plantée au XIX^{e} siècle sous l'impulsion de Napoléon III, dans le but de lutter contre l'avancée des dunes menaçant les villages, d'assécher les marais nombreux dans le territoire et de développer une ressource de matières premières (bois d'œuvre, poteaux télégraphiques, pâte à papier, solvants pour l'industrie chimique...). De nos jours, elle constitue aussi un atout considérable pour le tourisme vert. Hélas, plus de 32 000 hectares de ce précieux massif forestier ont été détruits au cours des gigantesques incendies de l'été 2022.

Mouvements d'eau dans un végétal, potentiel hydrique et analogie électrocinétique

Les végétaux terrestres prélèvent dans le sol l'eau et leurs nutriments qui sont des sels minéraux. Le liquide obtenu constitue la sève brute circulant dans la plante. Pour décrire cette circulation d'eau, les botanistes utilisent le potentiel hydrique, noté ψ. C'est une grandeur homogène à une pression, qui caractérise les états de liaison de l'eau dans les différents milieux et tissus cellulaires constituant le **Continuum Sol-Plante-Atmosphère** (**CSPA**). Ce dernier comprend (**figure 2**) :

- le sol,
- le xylème des racines, du tronc et des branches (ensemble des tissus cellulaires organisés en canaux de circulation de la sève brute),
- les stomates des feuilles (cellules de l'épiderme des feuilles régulant l'évapotranspiration),
- l'air de l'atmosphère au contact des feuilles.

Pour de l'eau liquide pure sous $P^\circ = 1\,\text{bar}$ (état de référence), le potentiel hydrique ψ est nul par convention. Il est négatif dans le CSPA (**figure 2**) car l'eau y est en interaction avec les tissus cellulaires. L'évapotranspiration au niveau des feuilles, provoquée par le rayonnement solaire, crée un appel d'eau vers l'atmosphère. Des gradients de potentiel hydrique apparaissent alors le long du CSPA, accompagnés de flux d'eau dans le sens des potentiels hydriques décroissants. Ces flux sont régis par la loi de Darcy : $\vec{j}_M = -\dfrac{K}{\rho_e\, g}\overrightarrow{grad}\,\psi$ où $\vec{j}_M$ désigne le vecteur densité volumique de courant de masse en eau, K la perméabilité hydraulique du milieu, ρ_e la masse volumique de l'eau et g l'accélération de la pesanteur. Cette circulation de masse d'eau dans le CSPA présente donc des analogies avec la circulation de charges électriques dans un milieu conducteur ohmique.

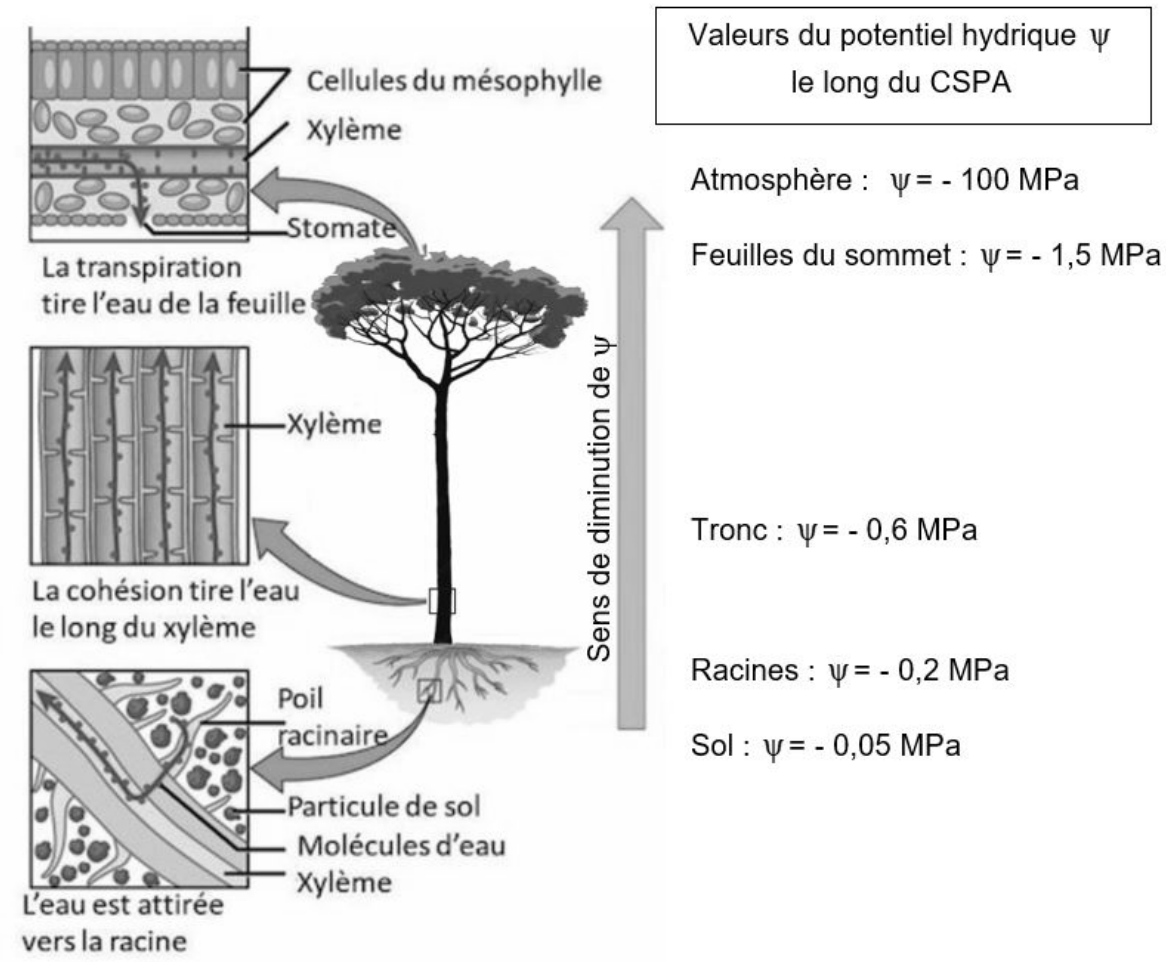


Figure 2 - Potentiel hydrique le long du CSPA
(www.encyclopedie-environnement.org/vivant/quete-de-eau-par-les-plantes)

Q1. **a)** Rappeler la loi d'Ohm locale dans un milieu ohmique (on l'écrira à l'aide du potentiel électrique *V*). À quelles grandeurs électriques sont analogues respectivement ψ et $\vec{j}_M$? Définir et exprimer, en fonction des données, la conductivité hydraulique γ, analogue de la conductivité électrique.

b) Dans ce modèle, la masse d'eau traversant une surface (S) par unité de temps, ou débit massique à travers (S), est $D = \iint_{(S)} \vec{j}_M . \overrightarrow{dS}$. De quelle grandeur électrique le débit massique D est-il l'analogue ?

Q2. **a)** Définir la résistance hydraulique R_H d'un tube de courant d'eau de débit massique *D*, d'extrémités A et B, soumis à une différence de potentiel hydrique $\psi_A - \psi_B > 0$.

b) Dans quelle unité faisant intervenir uniquement le mètre et la seconde, s'exprime la résistance hydraulique ?

Le système racinaire du pin est modélisé comme un faisceau de *N* racines cylindriques rectilignes de conductivité hydraulique γ_r, de section s_r et de longueur l_r, interconnectées au point O à la base du tronc (**figure 3**) et soumises à la même différence de potentiel hydrique $\psi_S - \psi_O > 0$, avec ψ_S le potentiel hydrique au niveau des extrémités des racines au contact avec le sol.

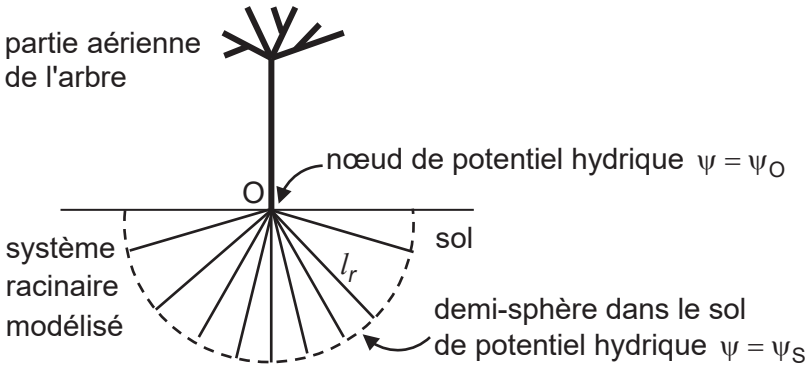


Figure 3 - Schéma d'un pin et de son système racinaire

Q3. Par circulation du champ $-\overrightarrow{grad}\,\psi$ le long d'une racine, établir l'expression de la résistance hydraulique R_r d'une racine en fonction de γ_r, s_r et de l_r. En déduire la résistance hydraulique R_N du système racinaire.

Q4. Avec R_N la résistance hydraulique du système racinaire, R_t celle du tronc, R_f celle du système foliaire et R_a celle à l'interface entre le système foliaire et l'atmosphère, donner en justifiant, le schéma électrique équivalent au système racines-tronc-feuilles-atmosphère.

La résistance hydraulique moyenne d'un pin adulte (des extrémités des racines au contact avec le sol jusqu'aux aiguilles à son sommet) est $R_p = 1{,}0 \cdot 10^9$ S.I.

Q5. À partir de R_p et des valeurs du potentiel hydrique de la **figure 2**, donner la valeur numérique de R_a.

Q6. En déduire la masse évapo-transpirée par un pin adulte pendant un jour d'été (avec les valeurs numériques de la **figure 2** et une durée d'exposition solaire journalière de 12 h).

Q7. On peut lire sur un document du C.N.P.F. (Centre National de la Protection Forestière) "*qu'un hectare de pins maritimes adultes aspire 15 à 25 tonnes d'eau par jour, cette eau étant évapo-transpirée par la partie aérienne de l'arbre*".
Sachant qu'il y a typiquement 300 pins adultes par hectare, les valeurs du C.N.P.F. sont-elles en accord avec le résultat trouvé en **Q6** ? On rappelle que 1 hectare = 10^4m^2.

Problème III - Caractéristique d'une diode à vide

Ce sujet est extrait de l'épreuve de physique-chimie CCS 2 MPI 2025.

Ce sujet a trait aux tubes à vide (figure 1a), longtemps utilisés pour construire des équipements électriques avant l'apparition des composants à base de matériaux semi-conducteurs. Les ordinateurs de la première génération des ordinateurs modernes étaient construits avec des tubes (environ 19 000 pour l'ENIAC !). De nos jours, les tubes à vide sont encore utilisés dans certains équipements audio (figure 1b) et pour certaines applications de forte puissance. Les principaux inconvénients des tubes à vide sont leur encombrement, leur fragilité et la nécessité d'une tension d'alimentation élevée (quelques centaines de volts).

Aucune connaissance préalable sur les tubes à vide n'est requise pour traiter le questionnement.



(a) Le tube ECC83.
Source : Wikipédia.



(b) Amplificateur audio à tubes.
Source : catalogue Auna.

Figure 1 – Tubes à vide.

Les tubes à vide sont classés selon le nombre d'électrodes qu'ils possèdent : diode (2 électrodes), triode (3 électrodes), tétrode (4 électrodes) et penthode (5 électrodes). La triode ECC83 (voir figure 1a) est le composant étudié dans ce sujet.

La figure 2 montre la constitution simplifiée d'une triode et le symbole électrique associé. Les électrodes de la triode s'appellent la cathode, l'anode et la grille. De plus, un filament dans lequel circule un courant continu chauffe la cathode. La présence de ce filament fait que ce tube est souvent nommé improprement *lampe*.

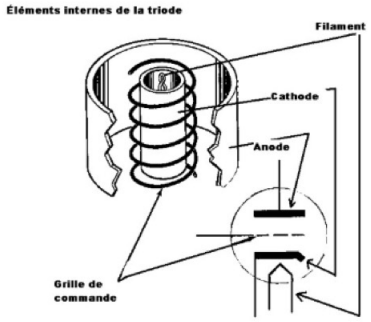


Figure 2 – Lien entre constitution et symbole électrique.
Source : Wikipédia.

Dans le tube de référence ECC83, la cathode est cylindrique de rayon $r_1 = 2{,}0$ mm et l'anode cylindrique de rayon $r_2 = 5{,}0$ mm. Elles sont coaxiales, d'axe (Oz), et toutes deux de hauteur $H = 45$ mm. L'ensemble est enfermé dans une enveloppe de verre et sous vide hors fonctionnement.

Dans cette première partie, la grille est ignorée. La triode ne fonctionne qu'avec sa cathode et son anode : il s'agit donc d'une diode. La cathode, chauffée par le filament (étudié partie B), est le siège d'une émission d'électrons appelée émission thermoïonique. **Par hypothèse, ces électrons ne possèdent pas de vitesse initiale et leur nombre dépend de la température T de la cathode**. L'anode est portée au potentiel $V_a > 0$ par rapport à la cathode de potentiel nul par choix ($V_c = 0$). Sous l'influence du champ électrique régnant entre cathode et anode, les électrons peuvent rejoindre l'anode et ainsi créer un courant électrique I_a circulant depuis l'anode vers la cathode.

Dans cette section, on cherche, **en régime stationnaire**, la caractéristique $I_a(U_{ac})$ de la diode à vide, dont le symbole électrique est rappelé à la figure 3. I_a représente le courant anodique, fléché (positif) entrant par l'anode (et donc sortant par la cathode) et U_{ac} est la tension anode - cathode.

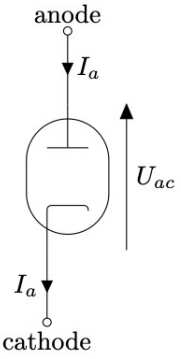


Figure 3 – Diode à vide : symbole et fléchage des grandeurs électriques associées.

On note ρ la densité volumique de charge électrique, *a priori* non uniforme, régnant dans l'espace entre anode et cathode et V le potentiel électrostatique. On se place en coordonnées cylindriques (r,θ,z), l'axe (Oz) étant confondu avec l'axe des cylindres anodique et cathodique.

Q1. Rappeler les équations de Maxwell en régime stationnaire. Justifier l'existence du potentiel électrostatique V et établir la relation qui lie V à ρ. Donner le nom de cette relation.

Les effets de bord sont négligés et on considère que le potentiel V admet pour dépendance spatiale uniquement la coordonnée radiale r.

Q2. Proposer des éléments de justification de ces choix.

Q3. Évaluer, en ordre de grandeur, le poids d'un électron et la force électrostatique subie par un électron circulant depuis la cathode vers l'anode. Conclure.

Q4. Traduire la conservation de l'énergie mécanique d'un électron circulant depuis la cathode vers l'anode pour en déduire la vitesse $v(r)$ d'un électron à la distance r de l'axe en fonction, notamment, du potentiel électrique $V(r)$.

Q5. Rappeler l'équation locale de conservation de la charge en régime quelconque. En déduire, pour le régime stationnaire d'étude, une propriété vérifiée par le vecteur densité de courant électrique $\vec{j}$. Établir la relation qui existe en conséquence entre r, H, $\rho(r)$, $v(r)$ et le courant électrique anodique I_a.

Q6. À l'aide des relations précédentes, montrer que le potentiel V est solution de la relation suivante en précisant l'expression du facteur k :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = k\,V^{-\frac{1}{2}}$$

Q7. Vérifier la cohérence de l'unité du facteur k.

L'équation différentielle obtenue à la question **Q6** ne possède pas de solution analytique simple vérifiant les conditions aux limites imposées ici. Seule une solution approchée est recherchée dans le cadre de ce sujet.

Q8. Déterminer par quels facteurs sont multipliés ρ, v et I_a si le potentiel de l'anode V_a est multiplié par un facteur N.

Le résultat précédent et la forme du second membre de l'équation différentielle suggèrent une solution pour cette dernière sous la forme d'une loi puissance de type $V(r) = \alpha\, r^n$.

Q9. Déterminer le système d'équations dont α et n sont solutions. En déduire la valeur de n et l'expression de α en fonction de k.

La forme de la solution utilisée ne permet pas de vérifier la condition imposée à la cathode : $V(r = r_1) = 0$. On choisit d'adopter pour la suite la solution approchée $V(r) = \alpha\,(r - r_1)^n$ qui vérifie cette condition, tout en conservant les expressions précédentes des constantes α et n.

Q10. Exprimer $U_{ac} = V(r_2) - V(r_1)$ en fonction de I_a et des autres paramètres utiles. En déduire que la relation caractéristique de la diode $I_a(U_{ac})$ s'écrit $I_a(U_{ac}) = \beta\, U_{ac}^{\frac{3}{2}}$ et préciser l'expression de β en fonction de ε_0, H, r_1, r_2, e et m. Déterminer la valeur numérique de β.

Q11. Expliquer pourquoi le résultat précédent n'est pas valable dans le cas $U_{ac} < 0$. Préciser ce qu'il se passe dans ce cas et indiquer la valeur de I_a correspondante.

Q12. Tracer la caractéristique $I_a(U_{ac})$.

On appelle « polariser une diode » l'action de choisir un point de fonctionnement pour celle-ci, c'est-à-dire choisir un couple de valeurs (I_a, U_{ac}) que l'on note (I_a^0, U_{ac}^0). Pour le tube ECC83, le point de fonctionnement optimal préconisé par le constructeur correspond à l'intensité $I_a = I_a^0 = 1{,}2$ mA.

Q13. Déterminer la valeur U_{ac}^0 telle que $I_a^0 = 1{,}2$ mA.

Données et formulaire

Données numériques

Charge élémentaire	$e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C
Masse de l'électron	$m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8{,}8 \times 10^{-12}$ F·m^{-1}
Constante de Boltzmann	$k_B = 1{,}4 \times 10^{-23}$ J·K^{-1}
Constante de Planck	$h = 6{,}6 \times 10^{-34}$ J·s
Constante de Stefan	$\sigma = 5{,}7 \times 10^{-8}$ W·m^{-2}·K^{-4}
Conductivité électrique du tungstène	$\gamma = 8{,}9 \times 10^{6}$ S·m^{-1}
Masse volumique du tungstène	$\mu_{\mathrm{W}} = 1{,}9 \times 10^{4}$ kg·m^{-3}
Conductivité thermique du tungstène	$\lambda = 1{,}7 \times 10^{2}$ W·m^{-1}·K^{-1}
Capacité thermique massique du tungstène	$c = 1{,}3 \times 10^{2}$ J·kg^{-1}·K^{-1}

Formulaire

- Loi de Wien : $\lambda_{\max} T = 2{,}9$ mm·K.
- Pour un champ scalaire a, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ a\right) = \vec{0}$.
- Pour un champ scalaire a, $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ a\right) = \Delta a$.
- Pour un champ scalaire a, à dépendance spatiale uniquement radiale en coordonnées cylindriques :

$$\Delta a(r) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}a(r)\right) .$$