

## Table des matières

|          |                                                       |           |
|----------|-------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>L'équation de Maxwell-Gauss</b>                    | <b>1</b>  |
| 1.1      | Énoncé . . . . .                                      | 1         |
| 1.2      | Principe de Curie . . . . .                           | 2         |
| 1.3      | Théorème de Gauss. . . . .                            | 4         |
| <b>2</b> | <b>Exemples de calcul de champ</b>                    | <b>6</b>  |
| 2.1      | La charge ponctuelle . . . . .                        | 6         |
| 2.2      | La sphère chargée en volume . . . . .                 | 7         |
| 2.3      | Le cylindre infini chargé en volume. . . . .          | 11        |
| <b>3</b> | <b>Le condensateur plan</b>                           | <b>13</b> |
| 3.1      | Le plan infini chargé en surface . . . . .            | 13        |
| 3.2      | Le condensateur plan. . . . .                         | 16        |
| <b>4</b> | <b>Les équations de Poisson et de Laplace</b>         | <b>18</b> |
| <b>5</b> | <b>Annexe : rappel sur les coordonnées sphériques</b> | <b>19</b> |

## 1 L'équation de Maxwell-Gauss

## 1.1 Énoncé

**Théorème.** Soit le champ électrique  $\vec{E}(M, t)$  et  $\rho(M, t)$  la densité volumique de charge au point  $M$  et à l'instant  $t$ . L'équation de Maxwell-Gauss est un des postulats de l'électromagnétisme, et indique

$$\operatorname{div} \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\varepsilon_0}$$

avec  $\varepsilon_0$  la permittivité diélectrique du vide.

**Remarque :** Cette équation est la première des quatre équations de Maxwell que nous verrons en électromagnétisme. Ces équations constituent, avec la force de Lorentz, constituent le postulat fondamental de l'électromagnétisme. On ne peut pas les démontrer, mais elles n'ont jamais été mises en défaut expérimentalement jusqu'à ce jour.

Comme vu dans le chapitre précédent, l'opérateur divergence traduit le flux local autour du point  $M$  du champ vectoriel. Ainsi, autour d'une zone chargée positivement, par exemple sur une charge ponctuelle, le champ électrique va diverger. On retrouve une des propriétés des lignes de champs détaillée dans le premier chapitre.

Le champ  $\vec{E}(M, t)$  décrit dans cette équation est un objet mathématique non trivial. En effet, on peut l'écrire en coordonnées cartésiennes

$$\vec{E}(M, t) = E_x(x, y, z, t) \vec{e}_x + E_y(x, y, z, t) \vec{e}_y + E_z(x, y, z, t) \vec{e}_z .$$

Pour déterminer ce champ, il faut donc déterminer entièrement trois fonctions de quatre variables. L'application de la divergence conduit à

$$\frac{\rho(M, t)}{\varepsilon_0} = \operatorname{div} \vec{E}(M, t) = \frac{\partial E_x}{\partial x}(x, y, z, t) + \frac{\partial E_y}{\partial y}(x, y, z, t) + \frac{\partial E_z}{\partial z}(x, y, z, t) .$$

Ainsi, on comprend bien que cette seule équation est insuffisante pour déterminer le champ électrique dans un cas quelconque.

## 1.2 Principe de Curie

### 1.2.1 Énoncé

**Définition.** On appelle **élément de symétrie** d'un objet physique toute transformation géométrique qui laisse cet objet invariant, c'est-à-dire qui peuvent l'amener à une parfaite correspondance avec lui même.

Ainsi, un cube est invariant vis-à-vis d'une symétrie par rapport à un plan passant par le milieu des arêtes (il y a trois plans de ce type), par rapport à une rotation d'angle  $\pi/2$ , par rapport à un axe  $\Delta$  passant par les milieux de deux faces opposées (il y a trois axes de ce type), par rapport à un plan contenant deux arêtes opposées, par rapport à une symétrie de centre  $O$  ( $O$  le milieu du cube), etc...

On constate facilement que, pour les structures géométriques usuelles, un grand nombre de telles transformations existent. L'ensemble des transformations laissant un objet invariant forme un groupe - au sens mathématique du terme - qui est le groupe de symétrie de l'objet.

Le principe de Curie énoncé en 1894<sup>1</sup> permet de comparer les éléments de symétrie d'un système (appelé ci-dessous « cause ») aux éléments de symétrie des propriétés de ce système (appelé ci-dessous « effets »).

**Théorème.** Le **principe de Curie** s'énonce de la manière suivante :

- ▷ lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les éléments de symétrie des effets produits ;
- ▷ lorsque certains effets révèlent une certaine dissymétrie, cette dissymétrie doit se retrouver dans les causes qui lui ont donné naissance.

On énonce ainsi souvent le principe de Curie sous la forme suivante assez suggestive mais pas assez précise : « un effet a au moins la symétrie de sa cause ».

La réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire que les effets produits peuvent être plus symétriques que les causes. Ce principe s'applique de manière générale, parfois de façon subtile<sup>2</sup>, dans tous les domaines de la physique et de la chimie.

### Plans de symétrie et d'anti-symétrie

**Définition.** Un plan de symétrie d'un objet (ou d'une figure) est un plan qui divise cet objet en deux parties identiques et superposables lorsqu'on effectue une réflexion par rapport à ce plan. Un plan d'antisymétrie est un plan par rapport auquel une réflexion transforme chaque point en un point symétrique opposé par un changement de signe d'une propriété.

Des exemples seront traités dans ce chapitre et le suivant, notamment sur l'antisymétrie.

### 1.2.2 Application au champ électrique

Dans le cas qui nous intéresse, les « causes » sont l'existence de distributions de charge et les « conséquences » sont les champs électrique  $\vec{E}$ .

**Symétries :** Prenons l'exemple d'une sphère constante chargée en volume, alors tout plan passant par le centre de celle-ci est plan de symétrie de la distribution de charge. Ainsi, par le principe de Curie, cette symétrie se retrouve dans le champ  $\vec{E}$  qui, en un point  $M$  de l'espace, est symétrique par rapport à tout plan passant par le point  $M$  et le centre de la sphère. Or ce champ est lui positionné au point  $M$ , cela implique donc que  $\vec{E}$  appartient à chaque plan de symétrie.

L'intersection de tous ces plans de symétrie est la droite  $OM$ , portée par le vecteur unitaire de la base sphérique  $\vec{e}_r$ .

1. Pierre Curie, « Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique », *Journal de physique théorique et appliquée*, vol.3, no 1, 1894, p. 393-415 [1].

2. Un dé est symétrique. En le lançant, sa symétrie doit se retrouver dans l'apparition de chacun des faces. Celle-ci ne se retrouve pas dans un lancer individuel, mais se retrouve au final dans l'ensemble des lancers car les six faces sont équiprobables.

**Propriété.** Le champ  $\vec{E}(M, t)$  appartient à tous les plans de symétrie de la distribution de charge passant par  $M$  ou, de façon équivalente, est orthogonal aux plans d'antisymétrie de la distribution de charge passant par  $M$ .

Un plan d'antisymétrie de la charge transforme  $\rho$  en  $-\rho$ .

**Invariances :** Pour la sphère chargée en volume précédente, toute rotation par rapport à un axe passant par son centre laisse la distribution de charges inchangée.

Ainsi, en coordonnées cylindriques, la distribution de charges  $\rho(r, \theta, \varphi, t) = \rho(r)^3$ . Par application du principe de Curie, la norme du champ  $E(M, t)$  ne dépend donc que de la coordonnée d'espace  $r$ .

**Remarque :** Il s'agit bien de la norme et non pas du champ vectoriel. La direction de celui-ci est en effet imposée par les symétries précédentes et le vecteur  $\vec{e}_r$  dépend de plusieurs coordonnées.

**Propriété.** Si la distribution de charge ne dépend pas d'une coordonnée de l'espace, la norme du champ  $E$  ne dépend pas de cette coordonnée.

Le fait de ne pas dépendre d'une coordonnée implique une invariance de la distribution par modification de celle-ci. Dans nos exemples, l'invariance prend la forme d'une invariance par translation rectiligne ou la forme d'une invariance par rotation autour d'un axe.

**Conséquences :** On vient de voir que, dans le cas de la distribution constante sphérique de charge, le champ  $\vec{E}(M, t)$  s'écrit au final  $E(r)\vec{e}_r$ . L'étude des symétrie a permis de passer de trois fonctions inconnues de quatre variables chacune à seulement une fonction inconnue d'une seule variable.

**Méthode :** Tout problème de calcul de champ doit commencer par une étude des symétries et des invariances des sources de champ dans le but de faire baisser le nombre d'inconnues du problème.

### 1.2.3 Utilité du principe de superposition

L'opérateur divergence est un opérateur linéaire, l'équation de Maxwell-Gauss est donc linéaire. Ainsi, si un champ  $\vec{E}_1$  est créé par une distribution  $\rho_1$  et si un champ  $\vec{E}_2$  est créé par une distribution  $\rho_2$ , la distribution  $\rho_1 + \rho_2$  induira le champ  $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ .

**Propriété.** Soit une distribution de charge  $\rho$  pouvant être décomposée comme la somme de distributions indépendantes  $\rho_i$ . Le principe de superposition, conséquence de la linéarité de l'équation de Maxwell-Gauss, implique que le champ électrique rayonné par  $\rho$  est la somme des champs électriques rayonnés par les  $\rho_i$  prises séparément.

Ce principe est très utile pour décrire des distributions n'ayant pas de symétrie ou d'invariance. En effet, s'il est possible de décomposer cette distribution en une somme de distributions ayant des symétries et des invariances, il suffit d'étudier les champs créés par celles-ci de façon indépendantes puis de sommer leur contribution au champ total.

**Exemple 1 :** Pour étudier le champ créé par une sphère chargée positivement contenant une cavité sphérique vide de charge. Le centre de la cavité n'est pas superposée avec le centre de la sphère. En un point  $M$  quelconque, il n'y a aucune symétrie ou invariance de la distribution. Toutefois, cette distribution est la somme d'une distribution sphérique de charge uniforme  $+\rho$  et d'une autre distribution sphérique de charge  $-\rho$ . Chacune de ces distributions a un haut degré de symétrie et peut être étudiée séparément. Le champ total est alors la somme de ces deux champs.

3. Pour un rappel sur les coordonnées sphériques, se reporter au paragraphe 5 page 19 de ce cours.

## 1.3 Théorème de Gauss

### 1.3.1 Formule de Green-Ostrogradski

Considérons un champ vectoriel  $\vec{A}(M)$ . Nous avons vu au chapitre précédent que le flux de ce champ à travers les faces d'un volume infinitésimal  $dV$  au voisinage du point  $M$  est  $\text{div } \vec{A}(M)dV$ .

Considérons maintenant deux points  $M_1$  et  $M_2$  infiniment proches et leurs deux volumes infinitésimaux partageant une face en commun. La somme des flux à travers les faces de chacun des volumes est égale au flux à travers les faces du volume commun. En effet, le flux à travers la face en commun apparaît dans chacun des flux locaux mais avec un signe différent, ces deux flux se compensent. Ce flux global est égal, par définition, à la somme des divergences multipliée par les volumes infinitésimaux.

Cette idée est à la base du théorème suivant dont la démonstration rigoureuse est laissée aux mathématiciens.

**Théorème.** Soit un champ vectoriel  $\vec{A}(M)$  et  $\mathcal{V}$  un volume fermé par une surface  $\mathcal{S}$ . La formule de **Green-Ostrogradski** (ou théorème de la divergence) indique

$$\iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{A}(M) dV = \oiint_{\mathcal{S}} \vec{A}(M) \cdot d\vec{S}.$$

L'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel sur un volume fermé est égale au flux de ce champ sur la surface frontière de ce volume.

Le rond sur l'intégrale du flux indique que celui-ci est calculé sur une surface fermée, ce qui est indispensable pour définir un volume intérieur.

Selon son signe, la divergence exprime la dispersion ou la concentration d'une grandeur et le théorème indique qu'une dispersion au sein d'un volume s'accompagne nécessairement d'un flux total équivalent sortant de sa frontière.

### 1.3.2 Énoncé du théorème

Appliquons la formule de Green-Ostrogradski au champ électrique. Il vient

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{E}(M, t) dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \rho(M, t) dV.$$

**Théorème.** Soit une surface fermée  $S$ , appelée **surface de Gauss**. Le **théorème de Gauss** indique

$$\oiint_S \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}(t)}{\varepsilon_0}$$

avec  $Q_{\text{int}}(t)$  la charge électrique, éventuellement variable, incluse dans la surface  $S$ .

**Remarque :** Ce théorème est vrai lorsque les charges sont variables mais nécessitent un transfert instantané de l'information entre la variation des charges et ce qui se passe sur la surface de Gauss. C'est donc vrai uniquement dans le cadre de l'ARQS.

Ce théorème est une reformulation intégrale de l'équation de Maxwell-Gauss. Il n'apporte fondamentalement aucune information supplémentaire que cette équation fondamentale. En particulier, le calcul du champ  $\vec{E}$  avec l'opérateur divergence est possible directement.

Toutefois, l'équation de Maxwell-Gauss est une loi locale. Elle est compliquée à manipuler lors de la présence de singularités ponctuelles. Ainsi, la description du champ créé par une charge ponctuelle, une distribution surfacique ou linéique de charge, n'est pas possible à notre niveau de mathématique. Le théorème de Gauss supprime ce problème car la charge intérieure est toujours correctement définie quel que soit le modèle de distribution de charge.

**Remarque :** En l'absence de charges, le champ électrique est à flux conservatif, cela signifie que son flux est nul sur n'importe quelle surface fermée est nul.

Prenons une surface construite sur un tube de champ. Par définition de celui-ci, le champ est parallèle à la surface latérale et donc le flux latéral est nul.

Ainsi, le flux entrant dans le tube est égal au flux sortant.

Si les lignes de champs se resserrent, la surface d'entrée devient plus grande que la surface de sortie. Nécessairement, le champs en sortie doit augmenter pour compenser la diminution de la surface. On retrouve donc que la valeur du champ augmente lorsque les lignes de champs se resserrent.

**Choix de la surface de Gauss :** Le théorème de Gauss est vrai **quelle que soit** la surface  $S$ . Ainsi, le choix de la surface  $S$  est crucial pour appliquer ce théorème. En effet, lorsque le champ présente un degré suffisamment important de symétries, le calcul du flux peut se simplifier à une surface multipliée par le module du champ. Dans ce cas, le théorème de Gauss permet de déterminer directement le module du champ, et donc de déduire le champ électrique.

**Méthode :** Pour choisir la surface de Gauss, il faut une surface pour lequel le flux est simple à calculer. Pour cela, deux critères essentiels sont à rechercher :

- ▷ on cherche une surface telle que le champ soit uniforme dessus ;
- ▷ on cherche une surface dont le vecteur surface est parallèle ou orthogonal au champ.

Le choix de la surface de Gauss à considérer est donc directement lié à l'étude des invariances et des symétries du champ électrique.

### 1.3.3 Remarque sur les calculs de potentiels

Le théorème de Gauss est vrai en régime statique comme en régime variable. Toutefois, on rappelle que la définition du potentiel électrostatique  $V$  n'est pas valable en régime variable.

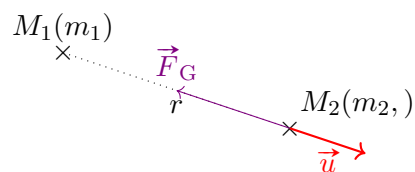
Ainsi, si le théorème de Gauss permet de trouver un champ électrique dans toute situation présentant un haut degré de symétrie, le calcul du potentiel à l'aide de la formule  $\vec{E} = -\text{grad } V$  n'est possible qu'en électrostatique, lorsque les charges sont immobiles.

### 1.3.4 Analogie avec la gravitation

On rappelle que la force **la force gravitationnelle** qu'une particule 1 de masse  $m_1$  exerce sur une autre particule 2 de masse  $m_2$  vaut

$$\vec{F}_G = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}$$

avec  $G$  la constante universelle de gravitation,  $r$  la distance entre les deux particules et  $\vec{u}$  le vecteur unitaire placée sur la particule 2, dirigée selon l'axe reliant les deux particules et orienté à l'opposé de la première particule.



On constate une analogie formelle entre la force électrostatique et la force de gravitation.

**Propriété.** La force gravitationnelle subie par une masse  $m$  au point  $M$  est donnée à l'aide du champ gravitationnel  $\vec{G}(M)$  par la relation  $\vec{F}_G = m\vec{G}(M)$ .

Les équations régissant le champ gravitationnel sont les mêmes que celles régissant le champ électrostatique à condition de réaliser l'équivalence formelle suivante :

$$\vec{G}(M) \longleftrightarrow \vec{E}(M) \quad \text{avec} \quad G \longleftrightarrow -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \text{et} \quad m \longleftrightarrow q .$$

| **Remarque :** On définit un potentiel gravitationnel  $V_G$  par la relation  $\vec{G}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$ .

On peut donc formellement écrire l'équation locale du champ

$$\text{div } \vec{G}(M, t) = -4\pi\mathcal{G}\rho_m(M, t)$$

avec  $\rho_m(M, t)$  la densité locale de masse.

On en déduit le théorème de Gauss appliqué à la gravitation

$$\oiint_S \vec{G}(M, t) \cdot d\vec{S} = -4\pi\mathcal{G}M_{\text{int}}(t)$$

avec  $M_{\text{int}}(t)$  la masse comprise à l'intérieur de la surface  $S$ .

Ainsi, tout comme le champ électrique, après étude des symétries et des invariances de la distribution de masse, on peut déduire les invariances et symétries du champ. Avec un choix judicieux de surface de Gauss, on peut ensuite en déduire le champ dans le cas d'un problème ayant un haut degré de symétrie.

## 2 Exemples de calcul de champ

### 2.1 La charge ponctuelle

Considérons une charge ponctuelle  $q$  placée en  $O$  l'origine du repère. Plaçons nous en coordonnées sphériques. *A priori*, on a au point  $M$  le champ

$$\vec{E}(M, t) = E_r(r, \theta, \varphi, t)\vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi, t)\vec{e}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi, t)\vec{e}_\varphi.$$

#### 2.1.1 Étude des invariances et des symétries

**Symétries :** Considérons un plan passant par la droite  $OM$ . Ce plan est plan de symétrie pour la distribution de charge. C'est vrai pour tous les plans passant par cette droite donc le champ appartient à tous ces plans. L'intersection de tous ces plans est la droite  $OM$  portée par le vecteur unitaire  $\vec{e}_r$ .

**Invariances :** La charge est ponctuelle. La distribution de charge est invariante par l'action de toute rotation autour du centre  $O$ . Ainsi, la norme du champ ne dépend pas des angles. De plus, la charge est constante, le champ ne dépend donc pas du temps.

Il vient donc  $\vec{E}(M, t) = \vec{E}(r) = E(r)\vec{e}_r$ .

#### 2.1.2 Application du théorème de Gauss

**Choix de la surface de Gauss :** Le système a un haut degré de symétrie. Le théorème de Gauss est adapté. La distribution de charge est singulière car la charge est ponctuelle. L'équation de Maxwell-Gauss n'est pas adaptée pour calculer le champ.

Pour répondre aux critères de la surface de Gauss, on choisit une sphère  $S$  de rayon  $r$  et de centre  $O$  comme représentée figure 1.

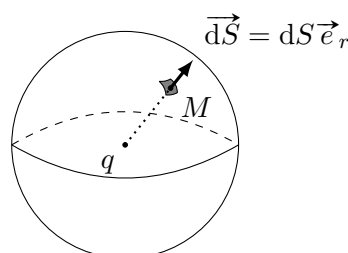


**Fig. 1** – La surface de Gauss dans le cas de la charge ponctuelle.

**Application du théorème :** On calcule le flux de  $\vec{E}(M, t)$  sur la surface de Gauss. On a

$$\oiint_S \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S} = \oiint_S E(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = \oiint_S E(r) dS.$$

Or, sur une sphère de rayon  $r$ , le nombre  $E(r)$  est constant et peut être sorti de l'intégrale. Il vient

$$\oiint_S \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S} = E(r) \oiint_S dS = E(r) 4\pi r^2$$

car  $4\pi r^2$  est la surface d'une sphère de rayon  $r$ .

La charge intérieure à cette surface  $S$  est simplement la charge  $q$ .

L'application du théorème de Gauss conduit donc à  $E(r) 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$ .

On conclut donc que  $\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r}$ . On retrouve naturellement le champ créé par une sphère ponctuelle.

## 2.2 La sphère chargée en volume

Considérons une distribution volumique sphérique de charge  $\rho(r)$  centrée en  $O$  telle que

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } r < R \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Plaçons nous en coordonnées sphériques. *A priori*, on a au point  $M$  le champ

$$\vec{E}(M, t) = E_r(r, \theta, \varphi, t) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi, t) \vec{e}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi, t) \vec{e}_\varphi.$$

### 2.2.1 Étude des invariances et des symétries

**Symétries :** Considérons un plan passant par la droite  $OM$ . Ce plan est plan de symétrie pour la distribution de charge. C'est vrai pour tous les plans passant par cette droite donc le champ appartient à tous ces plans. L'intersection de tous ces plans est la droite  $OM$  portée par le vecteur unitaire  $\vec{e}_r$ .

**Invariances :** La distribution de charge est invariante par l'action de toute rotation autour du centre  $O$ . Ainsi, le champ ne dépend pas des angles. De plus, la charge est constante, le champ ne dépend donc pas du temps.

Il vient donc  $\vec{E}(M, t) = \vec{E}(r) = E(r) \vec{e}_r$ . La distribution sphérique possède donc les mêmes invariances et symétries que la charge ponctuelle.

### 2.2.2 Application du théorème de Gauss

**Choix de la surface de Gauss :** Le système a un haut degré de symétrie. Le théorème de Gauss est adapté. À nouveau, la surface de Gauss choisie est donc une sphère  $S$  de rayon  $r$  et de centre  $O$ . Celle-ci est identique à celle représentée figure 1.

**Application du théorème :** On calcule le flux de  $\vec{E}(M, t)$  sur la surface de Gauss. On a

$$\oiint_S \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S} = \oiint_S E(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = \oiint_S E(r) dS.$$

Or, sur une sphère de rayon  $r$ , le nombre  $E(r)$  est constant et peut être sorti de l'intégrale. Il vient

$$\oiint_S \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S} = E(r) \oiint_S dS = E(r) 4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \implies E(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{4\pi r^2 \varepsilon_0}.$$

La charge  $Q_{\text{int}}$  dépend cette fois du rayon  $r$ . En effet, si  $r > R$ , la totalité de la distribution est englobée dans la surface de Gauss alors que, dans le cas contraire, seule une fraction de la charge est à l'intérieur de la surface de Gauss.

On a donc

$$Q_{\text{int}} = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 & \text{si } r < R \\ \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 = Q_0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où on a noté  $Q_0 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$  la charge totale contenue dans la distribution.

On en déduit donc en appliquant le théorème que

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \vec{e}_r & \text{si } r < R \\ \frac{\rho_0 R^3}{3r^2\varepsilon_0} \vec{e}_r = \frac{Q_0}{4\pi r^2\varepsilon_0} \vec{e}_r & \text{sinon.} \end{cases}$$

On constate que le champ  $\vec{E}(r)$  est continu en  $r = R$ , permettant ainsi la définition correcte de celui-ci. De plus, on constate que pour  $r > R$ , on retrouve la formule du champ de la charge ponctuelle.

**Propriété.** Soit une distribution sphérique centrée en  $O$  de rayon  $R$  de charge totale  $Q_0$ . Pour  $r > R$ , tout se passe comme si le champ électrique était le champ d'une charge ponctuelle de charge  $Q_0$  placée en  $O$ .

### 2.2.3 Calcul direct par l'équation de Maxwell-Gauss

L'expression de la divergence en coordonnées sphériques est

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial(\sin \theta E_\varphi)}{\partial \varphi}.$$

Or l'étude des invariances du paragraphe précédent reste valable, on a donc  $\vec{E}(M, t) = \vec{E}(r) = E(r) \vec{e}_r$ . L'expression précédente de la divergence se réduit donc à  $\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E(r))}{dr}$ .

**Application 1 :** En appliquant le théorème de Gauss sur un volume compris entre les sphères de rayon  $r$  et  $r + dr$ , retrouver cette expression de la divergence.

**À l'intérieur de la sphère :** Pour  $r < R$ , l'équation de Maxwell-Gauss implique  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$  soit

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 E(r))}{dr} = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \quad \implies \quad \frac{d(r^2 E(r))}{dr} = \frac{\rho_0 r^2}{\varepsilon_0} \quad \implies \quad r^2 E(r) = \frac{\rho_0 r^3}{3\varepsilon_0} + K_1$$

avec  $K_1$  une constante d'intégration. Or en  $r = 0$ , cette relation doit être vérifiée donc  $K_1 = \lim_{r \rightarrow 0} (r^2 E(r))$ .

Or en  $r = 0$ , le champ possède des symétries supplémentaires. En effet, tout plan passant par  $O$  est plan de symétrie de la distribution de charge, ce qui correspond donc à la totalité des plans de l'espace. Pour que le champ appartienne à tous ces plans, il doit être nul. Donc  $E(0) = 0$  et donc  $K_1 = 0$ . On en déduit donc que  $E(r < R) = \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0}$ . On retrouve donc le résultat du paragraphe précédent.

**Remarque :** Cette étape est indispensable. En effet, rien n'indique a priori que  $E(r)$  ne peut pas diverger en 0 plus vite que  $r^2$ . Dans ce cas,  $K_1$ , et donc le champ, serait infini en 0, comme c'est le cas du champ de la sphère ponctuelle. Cette divergence n'est possible que dans le cas de singularité qui n'ont en réalité pas d'existence physique. En effet, une charge totalement ponctuelle n'existe pas, même les électrons peuvent être considérés comme des sphères. Toutefois, à cette échelle, la physique des particules entre en jeu et il n'est pas raisonnable de rester dans le cadre de la physique classique.

**À l'extérieur de la sphère :** Pour  $r > R$ , on a cette fois  $\text{div } \vec{E} = 0$  soit  $\frac{d(r^2 E(r))}{dr} = 0$  et donc  $E(r)r^2 = K_2$  une constante.

Le champ électrique est continu, donc en utilisant le calcul à l'intérieur de la sphère, il vient  $E(R) = \frac{\rho_0 R}{3\varepsilon_0}$  et donc  $K_2 = E(R)R^2 = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}$  soit  $E(r > R) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ .

On retrouve donc bien le résultat du paragraphe précédent.

## 2.2.4 Calcul du potentiel électrostatique

La distribution de charges, et donc le champ électrique, sont indépendants du temps. Il est donc possible de calculer le potentiel électrique à l'aide de la formule  $\vec{E} = -\text{grad } V$ .

Comme  $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ , seule la composante radiale du gradient est à considérer. Les dérivées partielles du potentiel des autres variables sont donc nulles. On a alors  $\text{grad } V = \frac{dV}{dr}(r)\vec{e}_r$  et il faut donc résoudre  $\frac{dV}{dr}(r) = -E(r)$ .

**Potentiel à l'intérieur de la sphère :** On a

$$\frac{dV}{dr}(r) = -\frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad V(r) = -\frac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} + V_0$$

avec  $V_0$  une constante.

**Potentiel à l'extérieur de la sphère :** On a

$$\frac{dV}{dr}(r) = -\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \Rightarrow \quad V(r) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} + V_1$$

avec  $V_1$  une constante.

**Détermination des constantes :** Le potentiel, lié à l'énergie potentielle, est toujours défini à une constante près représentant l'origine des potentiels. Par convention, dans le cas d'une charge ponctuelle et donc d'une sphère chargée en volume, on prend le potentiel nul pour  $r \rightarrow +\infty$ . Cela implique donc  $V_1 = 0$ .

Ensuite, le potentiel est continu au passage  $r = R$ , on a donc

$$-\frac{\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0} + V_0 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\rho_0 R^2}{3\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad V_0 = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}.$$

On en déduit donc, en ayant imposé le potentiel nul en l'infini,

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} + \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0} & \text{si } r < R \\ \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r} & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Graphes :** Le champ et le potentiel sont tracés dans le graphe de la figure 2.

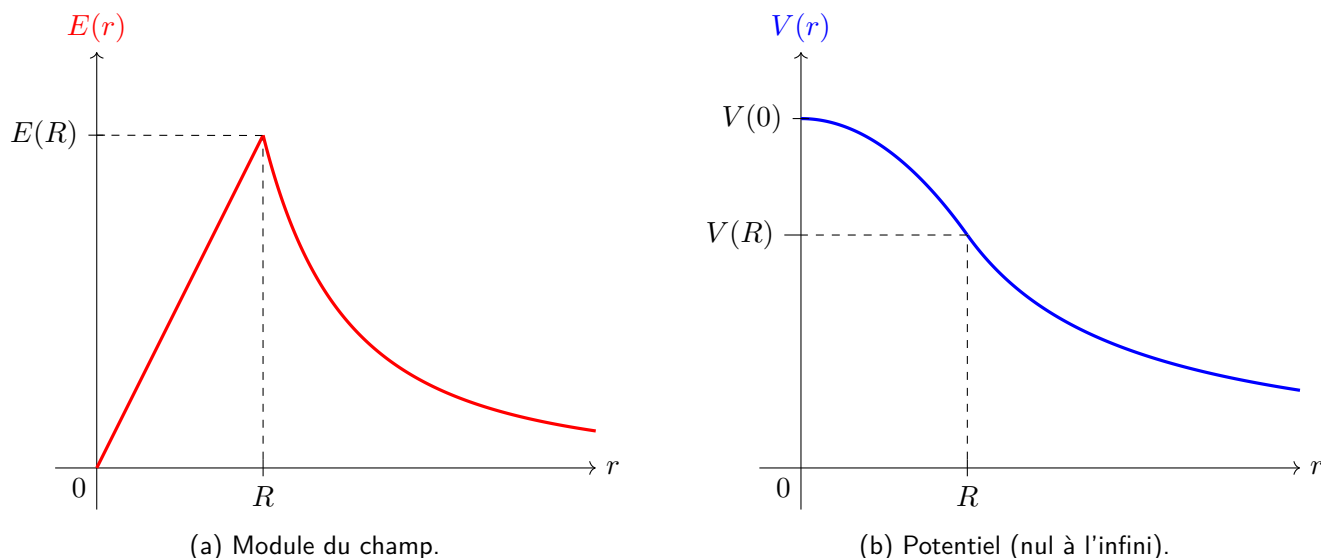


**Fig. 2** – Champ et potentiel d'une sphère uniformément chargée en volume de rayon  $R$ . On constate que le potentiel est dérivable en tout point alors que le champ ne l'est pas (car le champ est la dérivée du potentiel).

### 2.2.5 Énergie de liaison d'un noyau atomique

On modélise un noyau atomique par une boule uniformément chargée  $\rho_0$  de rayon  $R$ . Par ce qui précède, on sait que le potentiel électrostatique en  $R$  vaut  $V(R) = \frac{\rho_0 R^2}{3\epsilon_0}$ .

On définit l'énergie de constitution (ou énergie coulombienne) de cette sphère comme l'opposé du travail qu'il faut fournir pour la construire en prenant les charges à l'infini, et ce travail correspond par définition à l'opposé de l'énergie potentielle. On admet que cette énergie ne dépend pas de la façon dont on construit la sphère : on la construit par couches sphériques successives.

On souhaite donc augmenter le rayon de la sphère de  $dR$  en apportant une charge  $dq$ . Pour maintenir la densité de charge constante, il faut  $dq = \rho_0 d\tau$  avec  $d\tau = 4\pi R^2 dR$  le volume de la couche sphérique ajoutée.

Par définition de l'énergie potentielle, il vient pour rajouter une couche l'énergie élémentaire  $\delta\mathcal{E} = V(R)dq = \frac{\rho_0^2 R^2}{3\epsilon_0} 4\pi R^2 dR$ .

La construction complète du noyau atomique suppose l'intégration de cette énergie entre  $R = 0$  et  $R = R_0$  le rayon effectif du noyau. Il vient

$$\mathcal{E} = \int \delta\mathcal{E} = \int_0^{R_0} \frac{4\pi\rho_0^2 R^4}{3\epsilon_0} dR = \frac{4\pi\rho_0^2}{3\epsilon_0} \int_0^{R_0} R^4 dR = \frac{4\pi\rho_0^2}{3\epsilon_0} \frac{R_0^5}{5}.$$

En posant  $Q_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho_0$ , il vient  $\mathcal{E} = \frac{3Q_0^2}{20\pi\epsilon_0 R_0}$ .

**L'énergie de liaison :** Cette énergie est aussi parfois appelée **énergie de liaison** comme définie dans le chapitre EM1 pour les charges ponctuelles. On avait indiqué

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} q_i V_j(r_{ij}) = \frac{1}{2} \sum_i q_i \sum_{j, j \neq i} V_j(r_{ij})$$

avec  $r_{ij}$  la distance entre les particules  $i$  et  $j$  et  $V_j$  le potentiel créé par la particule  $j$ . En passant à la limite continue, la somme de tous les potentiels particuliers représente le potentiel total, il vient

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \iiint_{\text{Volume}} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) d\tau.$$

On constate que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iiint_{\text{Volume}} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) d\tau &= \frac{1}{2} \int_0^{R_0} \rho_0 \left( \frac{\rho_0 R_0^2}{2\varepsilon_0} - \frac{\rho_0 r^2}{6\varepsilon_0} \right) 4\pi r^2 dr ; \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{4\pi\rho_0^2 R_0^2}{2\varepsilon_0} \frac{R_0^3}{3} - \frac{4\pi\rho_0^2}{6\varepsilon_0} \frac{R_0^5}{5} \right] = \frac{4\pi\rho_0^2}{\varepsilon_0} \frac{R_0^5}{15} . \end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat précédent.

## 2.3 Le cylindre infini chargé en volume

Considérons une distribution volumique cylindrique de charge  $\rho(r)$  centrée autour de l'axe  $Oz$  en telle que

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } r < R \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Plaçons nous en coordonnées cylindriques. *A priori*, on a au point  $M$  le champ

$$\vec{E}(M, t) = E_r(r, \theta, z, t) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, z, t) \vec{e}_\theta + E_\varphi(r, \theta, z, t) \vec{e}_z .$$

### 2.3.1 Étude des invariances et des symétries

**Symétries :** Considérons le plan  $\Pi_1$  passant par le point  $M$  et contenant l'axe  $Oz$ . Il s'agit d'un plan de symétrie pour la distribution de charge. De plus, le plan contenant  $M$  et orthogonal au cylindre  $\Pi_2$  est aussi un plan de symétrie.

Le champ appartient à la droite à l'intersection de ces deux plans, portée par le vecteur unitaire  $\vec{e}_r$ . La situation est représentée figure 3.

**Invariances :** La distribution de charge est invariante par l'action de toute rotation autour du centre  $Oz$ . De plus, le cylindre étant infini, la distribution est invariante par toute translation le long de l'axe  $Oz$ . Ainsi, le champ ne dépend pas ni de l'angle  $\theta$ , ni de la coordonnée  $z$ . Enfin, la charge est constante, le champ ne dépend donc pas du temps.

Il vient donc  $\vec{E}(M, t) = \vec{E}(r) = E(r) \vec{e}_r$ .

### 2.3.2 Application du théorème de Gauss

**Choix de la surface de Gauss :** Le système a un haut degré de symétrie. Le théorème de Gauss est adapté. La surface de Gauss choisie est donc un cylindre  $C$  de rayon  $r$  et d'axe de symétrie  $Oz$  et de hauteur  $h$ . Celle-ci est représentée à celle représentée figure 4.

**Application du théorème :** On calcule le flux de  $\vec{E}(M, t)$  sur la surface de Gauss. On a

$$\oiint_S \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{Surface latérale}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{\text{Face supérieure}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{\text{Face inférieure}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S}_3 .$$

Or  $\vec{E}(M, t)$  est dirigé selon  $\vec{e}_r$  tandis que  $d\vec{S}_2$  et  $d\vec{S}_3$  sont dirigés selon  $\pm \vec{e}_z$ . Leur produit scalaire est donc nul. Les faces inférieures et supérieures ne contribuent pas au flux du champ électrique. De plus  $\vec{E}(M, t) = E(r) \vec{e}_r$  et  $d\vec{S}_1 = dS_1 \vec{e}_r$ . Il vient alors

$$\oiint_S \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{Surface latérale}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{\text{Surface latérale}} E(r) dS_1 .$$

Or, sur un cylindre de rayon  $r$ , le nombre  $E(r)$  est constant et peut être sorti de l'intégrale. Il vient

$$\oiint_S \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{Surface latérale}} E(r) dS_1 = E(r) \iint_{\text{Surface latérale}} dS_1 = E(r) 2\pi r h$$

car  $2\pi r h$  est la surface latérale du cylindre

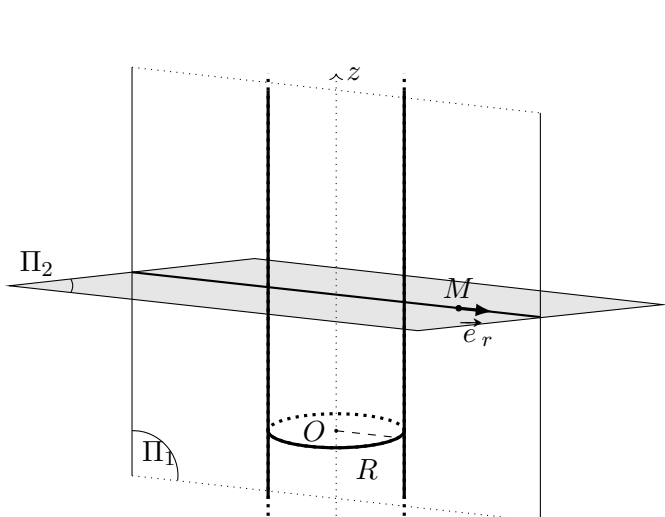


Fig. 3 – Plans de symétrie du cylindre infini.

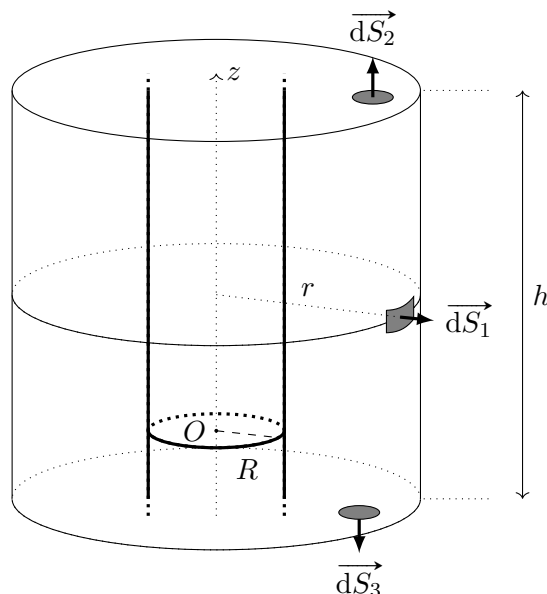


Fig. 4 – Surface de Gauss du cylindre infini.

La charge  $Q_{\text{int}}$  dépend à nouveau du rayon  $r$ . En effet, si  $r > R$ , toute la portion  $h$  de la distribution est englobée dans la surface de Gauss alors que, dans le cas contraire, seule une fraction de la charge est à l'intérieur de la surface de Gauss.

On a donc

$$Q_{\text{int}} = \begin{cases} \pi r^2 h \rho_0 & \text{si } r < R \\ \pi R^2 h \rho_0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit donc en appliquant le théorème que

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0} \vec{e}_r & \text{si } r < R \\ \frac{\rho_0 R^2}{2r\epsilon_0} \vec{e}_r & \text{sinon.} \end{cases}$$

On constate que le champ  $\vec{E}(r)$  est continu en  $r = R$ , permettant ainsi la définition correcte de celui-ci.

### 2.3.3 Calcul direct par l'équation de Maxwell-Gauss

L'expression de la divergence en coordonnées cylindriques est

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rE_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Or l'étude des invariances du paragraphe précédent reste valable, on a donc  $\vec{E}(M, t) = \vec{E}(r) = E(r) \vec{e}_r$ . L'expression précédente de la divergence se réduit donc à  $\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{d(rE(r))}{dr}$ .

**À l'intérieur du cylindre :** Pour  $r < R$ , l'équation de Maxwell-Gauss implique  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}$  soit

$$\frac{1}{r} \frac{d(rE(r))}{dr} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \implies \frac{d(rE(r))}{dr} = \frac{\rho_0 r}{\epsilon_0} \implies rE(r) = \frac{\rho_0 r^2}{2\epsilon_0} + K_3$$

avec  $K_3$  une constante d'intégration. Or en  $r = 0$ , cette relation doit être vérifiée donc  $K_3 = \lim_{r \rightarrow 0} (rE(r))$ .

Or en  $r = 0$ , le champ possède des symétries supplémentaires. En effet, tout plan passant par  $O$  et parallèle à  $Oz$  plan de symétrie de la distribution de charge. Or  $\Pi_2$  est aussi un plan de symétrie. Pour que le champ appartienne à tous ces plans, il doit être nul. Donc  $E(0) = 0$  et donc  $K_3 = 0$ . On en déduit donc que  $E(r < R) = \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0}$ . On retrouve donc le résultat du paragraphe précédent.

**À l'extérieur du cylindre :** Pour  $r > R$ , on a cette fois  $\text{div } \vec{E} = 0$  soit  $\frac{d(rE(r))}{dr} = 0$  et donc  $E(r)r = K_4$  une constante.

Le champ électrique est continu, donc en utilisant le calcul à l'intérieur du cylindre, il vient  $E(R) = \frac{\rho_0 R}{2\varepsilon_0}$  et donc  $K_4 = E(R)R = \frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0}$  soit  $E(r > R) = \frac{\rho_0 R^2}{2r\varepsilon_0}$ .

On retrouve donc bien le résultat du paragraphe précédent.

### 2.3.4 Calcul du potentiel électrostatique

La distribution de charges, et donc le champ électrique, sont indépendants du temps. Il est donc possible de calculer le potentiel électrique à l'aide de la formule  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ .

Comme  $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ , seule la composante radiale du gradient est à considérer. Les dérivées partielles du potentiel des autres variables sont donc nulles. On a alors  $\vec{\text{grad}} V = \frac{dV}{dr}(r)\vec{e}_r$  et il faut donc résoudre  $\frac{dV}{dr}(r) = -E(r)$ .

**Potentiel à l'intérieur du cylindre :** On a

$$\frac{dV}{dr}(r) = -\frac{\rho_0 r}{2\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad V(r) = -\frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0} + V_2$$

avec  $V_2$  une constante.

**Potentiel à l'extérieur du cylindre :** On a

$$\frac{dV}{dr}(r) = -\frac{\rho_0 R^2}{2r\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad V(r) = -\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0} \ln \frac{r}{R} + V_3$$

avec  $V_3$  une constante. On prend  $\frac{r}{R}$  dans le logarithme pour éviter d'avoir une fonction dimensionnée à l'intérieur de celui-ci. Ce choix n'influence en rien la formule car, quitte à choisir une constante  $V_3$  différente, on peut toujours se ramener à ce choix.

**Détermination des constantes :** Le potentiel, lié à l'énergie potentielle, est toujours défini à une constante près représentant l'origine des potentiels. On constate que le potentiel diverge en  $+\infty$ . On choisit alors de prendre le potentiel nul en 0 soit  $V_2 = 0$ .

Ensuite, le potentiel est continu au passage  $r = R$ , on a donc

$$-\frac{\rho_0 R^2}{4\varepsilon_0} = -\frac{\rho_0 R^2}{2\varepsilon_0} \ln 1 + V_3 \quad \Rightarrow \quad V_3 = -\frac{\rho_0 R^2}{4\varepsilon_0}$$

où on a utilisé  $\ln 1 = 0$ .

On en déduit donc, en ayant imposé le potentiel nul en  $r = 0$ ,

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{\rho_0 r^2}{4\varepsilon_0} & \text{si } r < R \\ -\frac{\rho_0 R^2}{4\varepsilon_0} \left( 2 \ln \left( \frac{r}{R} \right) + 1 \right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Graphes :** Le champ et le potentiel sont tracés dans le graphe de la figure 5.

## 3 Le condensateur plan

### 3.1 Le plan infini chargé en surface

Considérons un plan infiniment fin chargé en surface par la densité surfacique de charge  $\sigma$ . On se place en coordonnées cartésiennes, le plan  $xOy$  étant confondu avec le plan chargé.

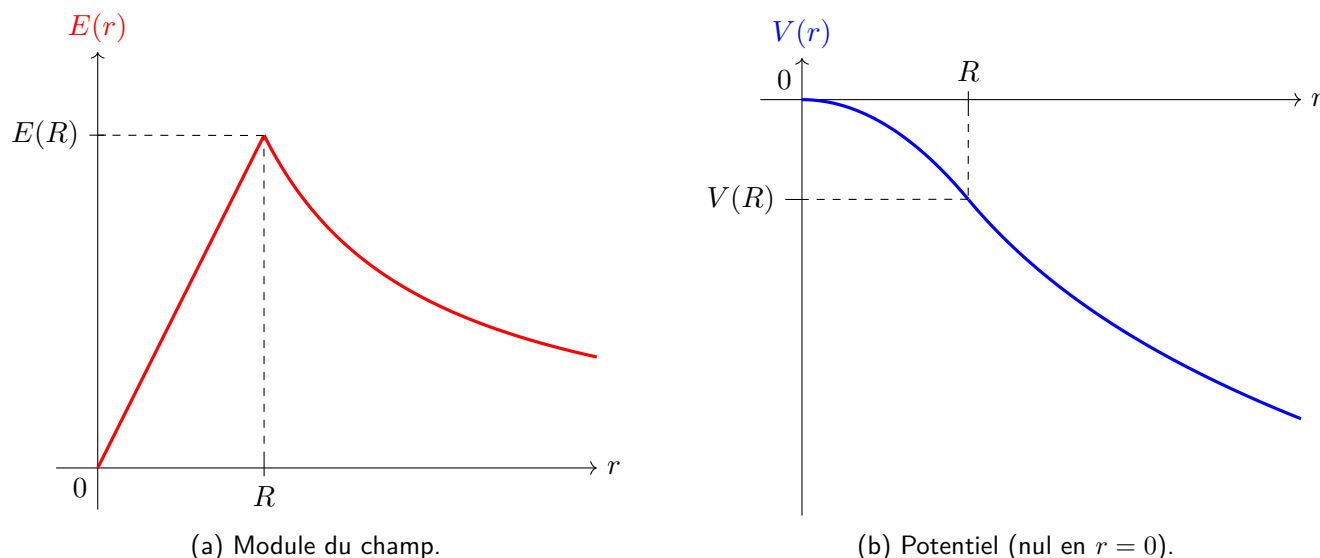


**Fig. 5** – Champ et potentiel d'un cylindre infini chargé en volume de rayon  $R$ . On constate que le potentiel est dérivable en tout point alors que le champ ne l'est pas (car le champ est la dérivée du potentiel).

### 3.1.1 Étude des invariances et des symétries

**Symétries :** Considérons n'importe quel plan orthogonal à la distribution de charge. Ce plan est plan de symétrie pour la distribution de charge. L'intersection de tous ces plans est l'axe  $Oz$  portée par le vecteur unitaire  $\vec{e}_z$ .

**Invariances :** Le plan est infini. La distribution de charge est invariante par toute translation selon  $Ox$  ou selon  $Oy$ . De plus, la charge est constante, le champ ne dépend donc pas du temps. Il vient

$$\text{Il vient donc } \vec{E}(M, t) = \vec{E}(z) = E(z) \vec{e}_z.$$

De plus, le plan de charge est lui même un plan de symétrie pour la distribution. Ainsi, une inversion de l'axe  $\vec{e}_z$  laisse le système inchangé. Le champ électrique doit donc aussi respecter cette symétrie. On a donc  $\vec{E}(z) = -\vec{E}(-z)$  soit  $E(z) = -E(-z)$ .

Les symétries sont représentées figure 6.

### 3.1.2 Application du théorème de Gauss

**Choix de la surface de Gauss :** Le système a un haut degré de symétrie. Le théorème de Gauss est adapté. La distribution de charge est singulière car le plan est infiniment fin. L'équation de Maxwell-Gauss n'est pas adaptée pour calculer le champ.

La surface de Gauss choisie est donc un cylindre  $C$  de rayon  $r$  et d'axe de symétrie  $Oz$  et de hauteur  $2z$ . Celle-ci est représentée à celle représentée figure 7.

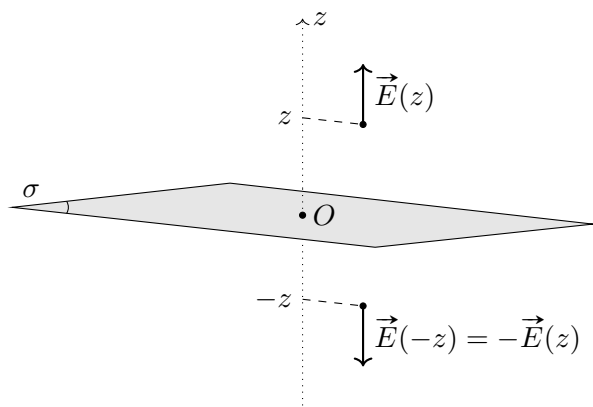


**Fig. 6** – Symétries du plan infini.

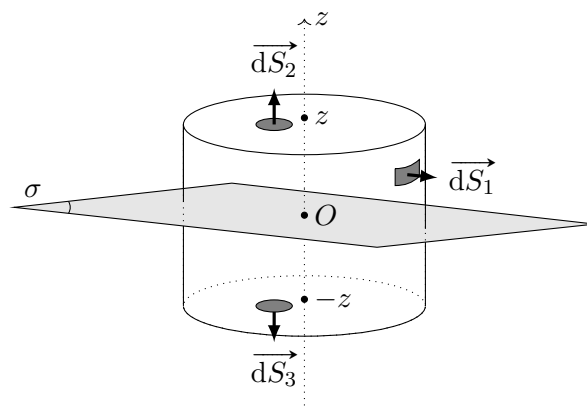


**Fig. 7** – Surface de Gauss du plan infini.

**Application du théorème :** On calcule le flux de  $\vec{E}(M, t)$  sur la surface de Gauss. On a

$$\oiint_S \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{Surface latérale}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{\text{Face supérieure}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{\text{Face inférieure}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S}_3.$$

Or  $\vec{E}(M, t)$  est dirigé selon  $\vec{e}_z$  tandis que  $d\vec{S}_1$  est dirigé selon  $\vec{e}_r$ . Leur produit scalaire est donc nul. La face latérale ne contribue pas au flux du champ électrique. De plus  $\vec{E}(M, t) = E(z)\vec{e}_z$ ,  $d\vec{S}_2 = dS_2\vec{e}_z$  et  $d\vec{S}_3 = -dS_3\vec{e}_z$ . Il vient alors

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S} &= \iint_{\text{Face supérieure}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{\text{Face inférieure}} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S}_3 ; \\ &= \iint_{\text{Face supérieure}} E(z)dS_2 + \iint_{\text{Face inférieure}} (-E(-z))dS_3. \end{aligned}$$

Or, sur un disque de hauteur  $z$  ou  $-z$ , le nombre  $E(z)$  est constant et peut être sorti de l'intégrale. Il vient

$$\oiint_S \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S} = E(z) \iint_{\text{Face supérieure}} dS_2 - E(-z) \iint_{\text{Face inférieure}} dS_3 = (E(z) - E(-z))S$$

où  $S$  est la surface transverse du cylindre.

On utilise maintenant la propriété d'imparité  $E(z) = -E(-z)$  issue de l'étude des symétries, il vient au final

$$\oiint_S \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S} = 2E(z)S.$$

Par définition de la densité surfacique de charge, on a charge  $Q_{\text{int}} = \sigma S$ .

On en déduit donc en appliquant le théorème que

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{si } z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z & \text{sinon.} \end{cases}$$

On constate que le champ est discontinu, conséquence de la distribution singulière de charge. Si on remplace la surface en une plaque d'épaisseur non nulle chargée uniformément en volume, la continuité du champ est rétablie.

### 3.1.3 Calcul du potentiel électrique

La distribution de charges, et donc le champ électrique, sont indépendants du temps. Il est donc possible de calculer le potentiel électrique à l'aide de la formule  $\vec{E} = -\text{grad } V$ .

Comme  $\vec{E} = E(z)\vec{e}_z$ , seule la composante  $z$  du gradient est à considérer. Les dérivées partielles du potentiel des autres variables sont donc nulles. On a alors  $\text{grad } V = \frac{dV}{dz}(z)\vec{e}_z$  et il faut donc résoudre  $\frac{dV}{dz}(z) = -E(z)$ .

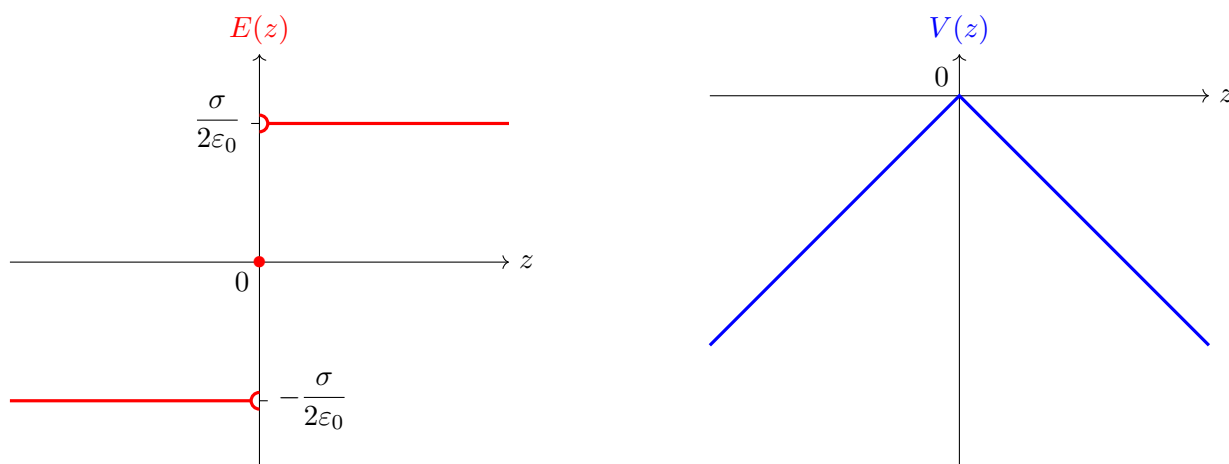
La fonction  $E$  étant constante par morceau, il vient directement

$$V(z) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + V_4 & \text{si } z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0}z + V_5 & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec  $V_4$  et  $V_5$  des constantes. Comme ce potentiel diverge à l'infini, on prend l'origine des potentiels en  $z = 0$ . Il vient alors  $V_4 = V_5 = 0$  et donc

$$V(z) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}z & \text{si } z > 0 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0}z & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Graphes :** Le champ et le potentiel sont tracés dans le graphe de la figure 8.



(a) Coordonnée  $E(z)$  du champ.  $E(0)$  est nul par imparité.

(b) Potentiel (nul en  $z = 0$ ).

**Fig. 8** – Champ et potentiel d'un plan infini chargé en surface. On constate que le potentiel est continu en tout point alors que le champ ne l'est pas. Comme le champ est la dérivée du potentiel, celui-ci est non dérivable en  $z = 0$ .

## 3.2 Le condensateur plan

### 3.2.1 Différence de potentiel entre deux plans infinis chargés

Considérons deux plans infinis parallèles chargés en surface séparés de la distance  $e$  représenté figure 9. Un plan est chargé avec une densité surfacique  $\sigma$  et l'autre avec  $-\sigma$  de sorte que la charge totale du système est nulle.

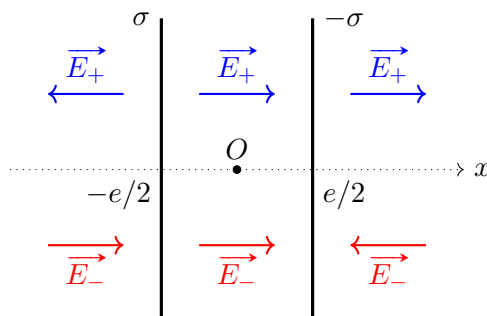


**Fig. 9** – Un condensateur plan constitué de deux plans infinis. Les champs créés par chacun des plans séparément sont représentés. La norme de tous ces champs est identique et vaut  $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ .

Comme c'est représenté figure 9, chaque plan infini rayonne un champ électrostatique étudié dans la partie précédente, il vient donc

$$\vec{E}_+(x) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x & \text{si } x > -e/2 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x & \text{si } x < -e/2 \end{cases} \quad \vec{E}_-(x) = \begin{cases} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x & \text{si } x > e/2 \\ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x & \text{si } x < e/2 \end{cases}$$

Par principe de superposition, on en déduit le champ total  $\vec{E}(x) = \vec{E}_+(x) + \vec{E}_-(x)$ , soit

$$\vec{E}(x) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x & \text{si } |x| < e/2 \\ \vec{0} & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même, par un calcul direct en calculant la circulant de ce champ ou en réutilisant les potentiels de la partie précédente, on en déduit

$$U = V_+ - V_- = V\left(-\frac{e}{2}\right) - V\left(\frac{e}{2}\right) = -\int_{e/2}^{-e/2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0}.$$

### 3.2.2 Modèle du condensateur plan

Un condensateur plan est constitué de deux armatures de surface  $S$ , l'une chargée positivement  $+Q$  et l'autre négativement  $-Q$ .

Pour calculer le champ entre les deux armatures, on suppose qu'elles sont suffisamment proches pour qu'il soit possible de négliger les effets de bords des plaques. Ainsi, on suppose que le modèle précédent de deux plaques infinies décrit un condensateur réel. Dans ce cas, on a  $\sigma = Q/S$ .

**Remarque :** Cette approximation qui semble très forte permet d'obtenir un résultat assez proche de la réalité. En effet, les lignes de champs du condensateur réel ne sont pas rectilignes, mais elles vont quasiment toutes de la plaque chargée positivement vers la plaque chargée négativement. Ce résultat pratique central permet de retrouver un résultat très proche du résultat du modèle proposé.

Dans le cadre du modèle du condensateur plan, la différence de potentiel  $U = V_+ - V_-$  entre l'armature chargée positivement et l'armature chargée négativement vaut  $U = \frac{e}{\varepsilon_0 S} Q$ .

**Définition.** Soient deux armatures conductrices, l'une chargée par  $+Q$  et l'autre chargée par  $-Q$ . Si les lignes de champs électriques issues de l'armature chargée positivement se terminent toutes sur l'armature chargée négativement, un condensateur se forme. On définit la **capacité du condensateur**  $C$  ainsi formé par la relation

$$C = \frac{Q}{U} > 0$$

avec  $U = V_+ - V_-$  la différence de potentiel entre les armatures.

Cette définition est vérifiée quelle que soit la géométrie du système. Elle permet aussi de justifier avec la formule d'électrocinétique  $q = CU$  vue en première année.

**Propriété.** Pour le **modèle du condensateur plan**, on trouve  $C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$  avec  $S$  la surface des armatures et  $e$  l'écart entre elles.

### 3.2.3 Les condensateurs réels

On admet la propriété suivante.

**Propriété.** En présence d'un diélectrique, il faut remplacer  $\varepsilon_0$  par  $\varepsilon_0 \varepsilon_r$  avec  $\varepsilon_r$  la permittivité relative du diélectrique.

La capacité du condensateur plan devient alors  $C = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 S}{e}$ .

Le but pratique en électrocinétique est d'obtenir la capacité la plus grande possible, pouvant supporter la différence de potentiel la plus élevée possible, tout en occupant le volume minimal.

On doit donc augmenter  $S$  (mais on est limité par l'encombrement) et diminuer l'épaisseur  $e$ . Dans ce dernier cas, on est limité par l'apparition d'étincelles lorsque le champ entre les armatures devient trop intense ; ces étincelles peuvent endommager définitivement le condensateur (on parle de *claquage*). Pour un condensateur donné, il y a donc une valeur maximale de différence de potentiel que l'on ne doit pas dépasser.

**Propriété.** Pour l'air, le champ maximal avant claquage, appelé champ *disruptif*, vaut 32 kV/cm.

L'utilisation d'un diélectrique permet d'augmenter notablement la capacité. Un bon diélectrique doit avoir une constante  $\varepsilon_r$  élevée, être un bon isolant et, dans le cas d'un régime variable (ce qui est la majorité des cas d'utilisations) se polariser rapidement.

Pour l'air, on a  $\varepsilon_r \approx 1$ , pour la papier  $\varepsilon_r \approx 2$  (champ disruptif à  $\approx 70 \text{ kV/cm}$ ) et pour le mica  $\varepsilon_r \approx 7$  (champ disruptif à  $\approx 140 \text{ kV/cm}$ ).

## 4 Les équations de Poisson et de Laplace

Plaçons nous en électrostatique, les charges et distributions de charges sont fixes. Dans ce cas, le potentiel électrique est défini par la relation  $\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}} V(M)$ .

On souhaite trouver une équation sur le potentiel  $V$  sans faire intervenir le champ  $\vec{E}$ . Pour cela, utilisons l'équation de Maxwell-Gauss, on a

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \text{div } \vec{E} = \text{div}(-\vec{\text{grad}} V) = -\text{div}(\vec{\text{grad}} V).$$

En coordonnées cartésiennes, la divergence d'un gradient se calcule simplement

$$\text{div}(\vec{\text{grad}} V) = \text{div} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

**Définition.** On définit l'opérateur **laplacien scalaire** qui, appliqué à une fonction scalaire, est défini par

$$\Delta f(M) = \text{div}(\vec{\text{grad}} (f(M))) .$$

En coordonnées cartésiennes, le laplacien s'écrit

$$\Delta f(M) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(M) .$$

En appliquant cette définition, il vient les équations vérifiées par le potentiel  $V(M)$ .

**Propriété.** Le potentiel électrique  $V$  en un point  $M$  de l'espace créé par une distribution **statique** de charge  $\rho$  est défini par **l'équation de Poisson**

$$\Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} = 0 .$$

Dans une région vide de charge, cette équation devient **l'équation de Laplace**

$$\Delta V(M) = 0 .$$

L'équation de Laplace se retrouve dans différents domaines de la physique, notamment dans les domaines ondulatoires.

**Application 2 :** Le laplacien en coordonnées sphériques est donné par

$$\Delta f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} .$$

Retrouver grâce à cela l'expression du potentiel électrostatique créé par une sphère chargée en volume défini au paragraphe 2.2.

**Application 3 :** Le laplacien en coordonnées cylindriques est donné par

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} .$$

Retrouver grâce à cela l'expression du potentiel électrostatique créé par un cylindre infini chargé en volume défini au paragraphe 2.3.

## 5 Annexe : rappel sur les coordonnées sphériques

En plus du référentiel cylindriques, on introduit la distance  $r = OM$ , l'angle orienté  $\varphi \in [0, 2\pi]$  entre  $(Ox)$  et  $(OH)$  et l'angle orienté  $\theta \in [0, \pi]$  entre  $(Oz)$  et  $(OM)$ .

On introduit trois vecteurs unitaires :

- le vecteur  $\vec{e}_r$  défini par  $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$
- le vecteur  $\vec{e}_\theta$  orthogonal à  $\vec{e}_r$ , dans le plan  $(OMH)$  et dirigé dans le sens des  $\theta$  croissants
- le vecteur  $\vec{e}_\varphi$  correspondant au vecteur  $\vec{e}_\theta$  des coordonnées cylindriques

⚠ ⚠ ⚠ **Attention !** Les notations pour  $r$ ,  $\theta$ ,  $\vec{e}_\theta$  et  $\vec{e}_r$  sont les mêmes que pour le repère cylindrique mais ne correspondent pas à la même chose.

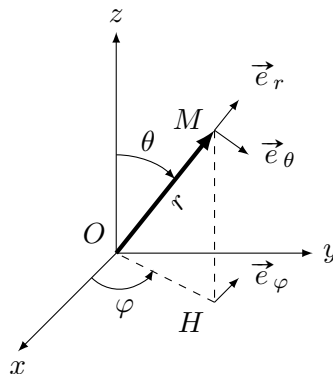


**Fig. 10** – Les coordonnées sphériques.

Dans ce cas, le vecteur position est simplement défini par  $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ .

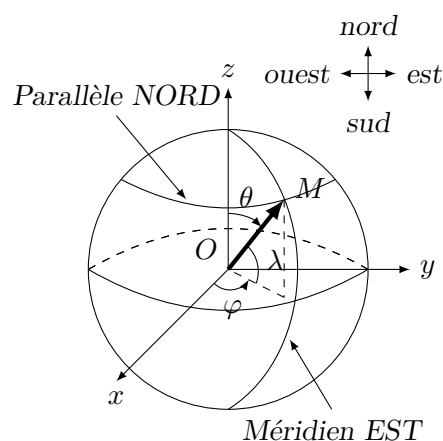
Les vecteurs  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  forment une base orthonormée directe et  $(r, \theta, \varphi)$  sont les **coordonnées sphériques**.

On peut manipuler ces coordonnées à l'aide de l'[animation](#) [2].

**Remarque :** On considère un point  $M$  à la surface de la Terre. L'angle  $\varphi$  est nommé longitude et l'angle  $\lambda = |\pi/2 - \theta|$  est nommé latitude.

$\varphi = 0$  correspond au méridien de Greenwich (qui passe en France) et  $\lambda = 0$  correspond à l'équateur. La donnée de ces deux angles constituent les coordonnées GPS.

Par exemple, la ville de Moscou (Russie) est située à  $55^\circ$  NORD et  $37^\circ$  EST (ce qui signifie que  $\lambda = 55^\circ$ ,  $\theta = 35^\circ$  et  $\varphi = 37^\circ$ ) alors que la ville de Rio de Janeiro (Brésil) est située à  $23^\circ$  SUD et  $43^\circ$  OUEST (ce qui signifie que  $\lambda = 23^\circ$ ,  $\theta = 113^\circ$  et  $\varphi = -43^\circ$ ). On précise NORD/SUD et EST/OUEST pour savoir de quel côté de l'équateur et du méridien de Greenwich on se trouve.



## Références

- [1] <https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00239814/document>
- [2] [http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve\\_tulloue/Meca/Cinematique/coord\\_spheriques.php](http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/coord_spheriques.php)