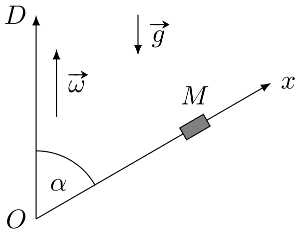
Colle n° 9 : Mécanique 3 - Thermo 1

Exercice 1 - Déviation vers l'est : Une particule de masse m est lancée vers le haut selon la verticale Oz d'un lieu de latitude λ, avec une vitesse initiale $\vec{v} = v_0\vec{e}_z$. On note $\vec{\Omega}$ le vecteur de rotation instantanée de la Terre.

1. Dans un premier temps, on suppose le référentiel Oxyz galiléen. Donner l'altitude maximale atteinte par la masse. En déduire, pour des hauteurs maximales de quelques centaine de mètre, la valeur du paramètre $\eta = \Omega v_0/g$.
2. On recherche à déterminer la déviation Δy observée selon l'axe y'Oy. On abandonne l'hypothèse de référentiel galiléen pour Oxyz et on tient compte de la rotation de la Terre sur elle-même. En considérant la force d'inertie de Coriolis, et en utilisant en première approximation la loi de vitesse trouvée à la question précédente, donner une évaluation de cette déviation.
3. Application Numérique : on prendra $\lambda = 51°$ pour une altitude maximale atteinte de 100 m.

Exercice 2 - Anneau sur une tige en rotation : Un axe matériel Ox est incliné d'un angle α par rapport à un axe vertical D. L'axe Ox est animé d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω autour de D. Un solide M assimilable à un point matériel, de masse m, coulisse sans frottement sur l'axe Ox.



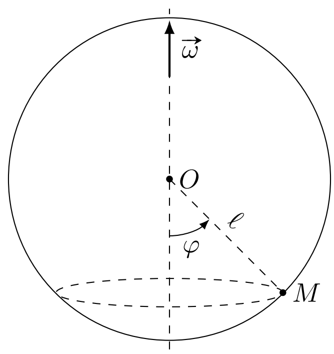
1. Déterminer la position d'équilibre relatif M_0 de M sur Ox. On posera $\Omega = \omega\sin(\alpha)$.
2. M est abandonné sans vitesse relativement à Ox à une distance a de M_0, telle que $\overrightarrow{M_0M}(t=0) = a\overrightarrow{u_x}$. Donner l'expression de $\xi = M_0M$ en fonction du temps. Quelle est la nature de la position d'équilibre M_0 ?
3. Dans le cadre du mouvement décrit à la question précédente, calculer à l'instant t la composante de l'action de M sur Ox perpendiculaire au plan DOx.

Exercice 3 - Équilibre relatif :

On considère un cerceau en rotation sur lequel coulisse une bille sans frottement.

On considère que le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$ est galiléen. On note $\mathcal{R}$ le référentiel lié au cerceau en rotation à la vitesse $\vec{\omega}$ par rapport à $\mathcal{R}_T$. On se place en régime permanent de rotation ($\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{Cte}}$).

1. Trouver les positions d'équilibre de la bille M, discuter leur stabilité.
2. Donner l'équation de son mouvement dans $\mathcal{R}$ (sans chercher à la résoudre).

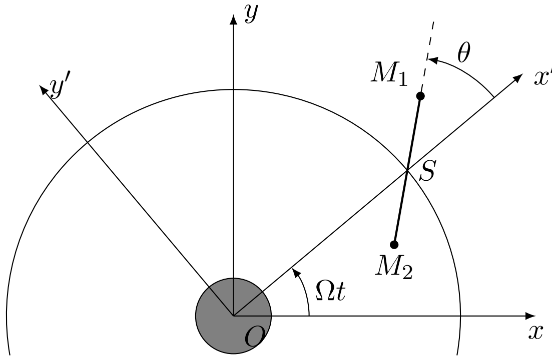


Exercice 4 - Stabilisation d'un satellite par gradient de gravité : La méthode de stabilisation d'attitude par gradient de gravité a été mise en œuvre pour les satellites artificiels afin qu'ils présentent vers la Terre toujours le même côté. Elle ne requiert aucune ressource d'énergie embarquée. Le principe de cette méthode a été établi par Lagrange, au XVIIe siècle, afin d'expliquer pourquoi la Lune présente toujours la même face vers la Terre.

Modèle : le satellite est constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de masses identiques $m = \dfrac{1}{2} \times M_S$ reliés par une tige rigide de masse nulle et de longueur 2ℓ.

Le barycentre S du satellite décrit autour de la Terre une orbite circulaire de rayon $r_0 = R_T + h$ (avec $h \ll R_T$). Le référentiel géocentrique ($\mathcal{R}$) lié au repère ($Oxyz$) est supposé galiléen. Le plan orbital est Oxy.

Le référentiel ($\mathcal{R}'$) défini par le repère ($Ox'y'z$) lié au satellite tourne autour de la Terre avec une vitesse angulaire Ω. Les points M_1 et M_2 sont dans le plan orbital : $\overrightarrow{OS} = r_0\vec{u}, \overrightarrow{OM_1} = r_1\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{OM_2} = r_2\overrightarrow{u_2}$ où $\vec{u}, \overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont unitaires. On appelle θ l'angle de M_2M_1 avec l'axe Ox' de ($\mathcal{R}'$). On cherche à déterminer les



éventuelles positions d'équilibre du satellite dans le référentiel $(\mathcal{R}')$ et leur stabilité. On suppose qu'il n'y a pas de frottements.

On note G la constante universelle de gravitation.

1. Exprimer les forces gravitationnelles $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ qui agissent sur M_1 et M_2.
2. Exprimer dans $(\mathcal{R}')$ les forces d'inertie d'entraînement qui agissent sur M_1 et M_2, en fonction de $m, \Omega, \overrightarrow{r_1}$ et $\overrightarrow{r_2}$. Exprimer dans $(\mathcal{R}')$ les forces d'inertie de Coriolis qui agissent sur M_1 et M_2, en fonction de $m, \Omega, \overrightarrow{SM_1}, \overrightarrow{SM_2}$ et $\dot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$.
3. Montrer que, dans $(\mathcal{R}')$, le moment des forces d'inertie de Coriolis en S est nul. Établir que, dans $(\mathcal{R}')$, le moment résultant calculé en S des actions extérieures a pour amplitude, pour $\ell \ll r_0$:
$$\Gamma_s = 6GmM_T\frac{\ell^2}{r_0^3}\sin(\theta)\cos(\theta)\,.$$
Préciser la direction et le sens de ce moment cinétique.
4. Appliquer le théorème du moment cinétique dans $(\mathcal{R}')$. Établir l'équation différentielle du mouvement. Déterminer les valeurs de θ qui correspondent à une position d'équilibre dans $(\mathcal{R}')$.
5. Montrer que $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable. Existe-t-il une position d'équilibre instable ? Quelle est la forme de l'équation différentielle pour les petits mouvements autour de cette position d'équilibre instable ?

Exercice 5 - Étude du TGV : Lors d'un essai réalisé durant la campagne préalable à la tentative de record sur une voie approximativement rectiligne et plus ou moins horizontale, on a relevé les données suivantes.

t(s)	0	70	95	124	155	231	263	332
V(km/h)	0	150	200	250	300	350	400	450

1. Calculer, sur chaque intervalle de mesure, les valeurs de l'accélération moyenne de la rame. On exprimera ces valeurs en m/s^2 dans un tableau récapitulatif. Estimer la distance parcourue nécessaire pour atteindre la vitesse de 450 km/h.
2. Un journaliste convié à cet essai avait apporté un petit pendule simple qu'il avait suspendu au plafond de la voiture. Il comptait, selon ses mots, « mettre en évidence la grande vitesse du train ». Sa méthode permettait-elle réellement de mettre la vitesse du train en évidence ? Quelle a été, en régime permanent, l'inclinaison maximale du pendule par rapport à la verticale durant l'essai ?

Sur le tronçon de la voie d'essai, il y avait quelques virages. Dans la suite, nous prendrons comme exemple le virage situé entre les points kilométriques 190 et 197 de la voie, de longueur d'arc $s = 6323$ m et de rayon de courbure $\chi = 16\,667$ m tournant à gauche. Ce virage est parcouru à la vitesse constante de 540 km/h. Les faces internes des rails sont distantes de $\ell_r = 1435$ mm. Les centres de gravité des remorques sont approximativement situés à une hauteur $h = 2.5$ m du rail.

On considère le cas hypothétique d'une voie sans dévers, c'est-à-dire que les deux rails sont dans le même plan horizontal.

3. La transition entre la voie rectiligne et la voie en virage se fait par l'intermédiaire d'un tronçon de raccordement parabolique de longueur 130 m. Quelle est la durée de cette phase de transition ? Qu'ont ressenti les passagers se tenant debout dans les voitures durant le franchissement du tronçon de transition ? On traduira ces effets de façon quantitative en exprimant les valeurs extrêmes de la force ressentie par un passager de masse $m_p = 75$ kg se tenant au centre du train.
4. Un verre d'eau posé sur la tablette devant un passager mettrait en évidence la force d'inertie présente dans le virage de deux manières différentes. Lesquelles (on ne demande aucun calcul) ?
5. À quelle vitesse maximale théorique le train peut-il parcourir le virage sans risque de décollement des roues ?