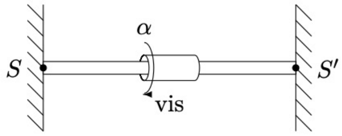
Colle n° 8 : Mécanique 2

Exercice 1 - Barre de traction : On considère une barre de traction, dont on néglige la masse, en appui contre un mur aux points S et S'. La vis centrale peut tourner d'un angle α avec un pas $p = 0.15\,\text{cm}$ pour modifier la longueur totale de la barre, c'est-à-dire que la barre s'allonge de $0.15\,\text{cm}$ lorsque α réalise un tour complet.

Pour $\alpha = 0$, la barre tient juste au mur.



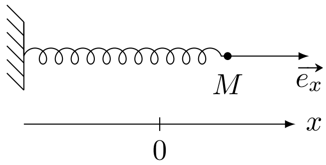
Données :

- loi de Hooke : la force interne exercée sur un solide de section S et de longueur ℓ_0 pour le raccourcir d'une longueur $\delta\ell$ est de norme : $F = SE\dfrac{\delta\ell}{\ell_0}$, cette force compense la réaction normale,
- module de Young du fer : $E = 10\,\text{GPa}$,
- $\ell_0 = 1\,\text{m}$; $S = 1.8 \times 10^{-3}\,\text{m}^2$,
- coefficient de frottement sur le mur : $f = 0.6$.

Un homme de 70 kg veut faire des tractions avec une période $T = 1\,\text{s}$.

1. En supposant que le mouvement de l'homme est sinusoïdal, donner la force maximale subie par la barre.
2. En supposant que la barre reste parfaitement horizontale, donner la condition pour que celle-ci ne glisse pas sur le mur en fonction de l'élongation $\Delta\ell$ de celle-ci.
3. En déduire l'angle α dont il faut tourner la vis centrale pour que l'ensemble tienne en place.

Exercice 2 - Oscillateur avec frottements solides : On considère un oscillateur masse-ressort horizontal avec un frottement solide de coefficient $f_s = f_d = f$. Le ressort est de raideur k et l'origine $x = 0$ correspond à sa longueur à vide. La masse M est abandonnée sans vitesse initiale à l'abscisse x_0 vérifiant $kx_0 > fmg$.



1. Déterminer l'équation du mouvement jusqu'au premier point de vitesse nulle puis la résoudre.
2. Calculer successivement les élongations maximales du ressort.
3. Indiquer la condition pour que la masse s'arrête définitivement après le $n^{\text{ième}}$ arrêt.
4. Tracer x en fonction de t.

Exercice 3 - Hémisphères de Magdebourg : Au milieu du XVII^e siècle, Otto von Guericke, bourgmestre de la ville allemande de Magdebourg, ayant mis au point une pompe à vide, présenta une expérience spectaculaire. En prenant deux hémisphères métalliques de $R = 28\,\text{cm}$ de rayon munis chacun d'un crochet en son sommet, il les joignit pour former une sphère et en pompa l'air intérieur grâce à sa pompe. Deux équipages de seize chevaux furent alors attelés chacun à un crochet d'une hémisphère et entraînés en sens opposé pour essayer de les séparer, en vain.

Déterminer la force qu'auraient dû exercer les chevaux pour parvenir à séparer les hémisphères.

Exercice 4 - Modèle d'atmosphère : L'air de la troposphère (partie de l'atmosphère dans laquelle nous vivons) est considéré comme un gaz parfait de masse molaire M. On suppose le champ de pesanteur uniforme. Au niveau du sol $z = 0$, la pression est P_0 et la température T_0.

1. On suppose maintenant que la température de l'air décroît linéairement avec l'altitude z selon la loi $T(z) = T_0 - \lambda z$ (avec $\lambda > 0$) avec $\lambda = 5.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{K \cdot m^{-1}}$.
   (a) Montrer que la pression à l'altitude z est de la forme $P(z) = P_0\,(1 - \lambda z/T_0)^{T_0/(\lambda H)}$.
   (b) Calculer dans ce modèle la pression au sommet de l'Everest (8850 m).
2. Pour $z \ll H$ montrer que les résultats obtenus à l'aide de ce modèle et de celui de l'atmosphère isotherme conduisent à une même fonction affine $P(z)$ donnant la pression en fonction de l'altitude.

Exercice 5 - Liquide en rotation : Soit un cylindre de rayon R et de hauteur H, rempli d'eau liquide de masse volumique ρ jusqu'à une hauteur h_E (en l'absence de rotation), en rotation autour de l'axe (Oz) à la vitesse constante ω. On se place en régime permanent.

1. Exprimer en coordonnées cylindriques l'accélération d'une particule fluide de masse $\rho\,\mathrm{d}V$ dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Projeter la relation fondamentale de l'hydrostatique des axes pertinents.
2. Montrer que vue en coupe, la surface libre de l'eau est une parabole. Établir son équation.
3. À quelle hauteur z_O se trouve le fond de la surface libre quand le cylindre tourne à ω ?
4. À quelle vitesse minimale ω_1 faut-il tourner pour voir le fond du cylindre à sec ?
5. À quelle vitesse ω_2 faut-il tourner pour voir le liquide déborder ?

Exercice 6 - Équilibre d'un bouchon de liège : Un bouchon de liège cylindrique de hauteur $H = 5.0\,\mathrm{cm}$ et de section $s = 2.0\,\mathrm{cm}^2$ est placé verticalement dans une éprouvette graduée également cylindrique, et de diamètre légèrement supérieur. Les frottements sur les parois son négligés, et on considère que le bouchon reste vertical. L'éprouvette contient une quantité d'eau suffisante pour que le bouchon flotte sans toucher le fond.

1. Déterminer la hauteur de liège immergée.
2. On pose sur le bouchon une pièce de monnaie de masse $m = 3.0\,\mathrm{g}$. Quelle est la nouvelle hauteur immergée ?
3. On retire brusquement la pièce. Le bouchon oscille alors verticalement. Déterminer la période de ses oscillations et faire l'application numérique.
4. Comment ces résultats sont-ils modifiés si on remplace le liège par une cheville cylindrique de chêne de même dimensions, et que l'éprouvette est remplie de deux volumes égaux d'eau et de cyclohexane, qui ne sont pas miscibles ?

Données : densité du liège : $d_\mathrm{l} = 0.25$, densité du chêne : $d_\mathrm{c} = 0.85$, densité du cyclohexane : $d_\mathrm{cy} = 0.78$.

Exercice 7 - Force de Coriolis et écoulement d'un fleuve : Un fleuve coule dans la direction Nord-Sud à la vitesse $v = 1\,\mathrm{m/s}$ en un lieu de latitude $\lambda = 45°$ où sa largeur est $\ell = 200\,\mathrm{m}$.

1. Quelles sont les forces s'exerçant sur un petit volume d'eau ?
2. Calculer la dénivellation entre les deux rives due à la force de Coriolis.