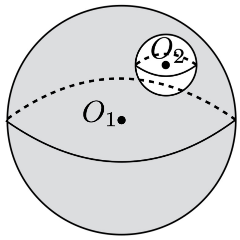
# Colle n° 5 : Électromagnétisme

**Exercice 1 - Champ dans une cavité sphérique :**

Une boule de rayon $a$ et de centre $O_1$ est uniformément chargée avec une densité volumique de charges $\rho_0 > 0$, mis à part une cavité sphérique, entièrement incluse dans la boule, centrée en $O_2$, de rayon $b$ vide de charges. On cherche le champ électrique en un point $M$ à l'intérieur de la cavité.




Calculer le champ électrique en $M$ situé à l'intérieur de la cavité.

**Exercice 2 - Champ et potentiel créés par deux fils infinis :** On considère un fil infini d'axe $Oz$ portant une densité linéique de charges constante $\lambda$.

1. Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}$ .
2. En déduire le potentiel électrostatique $V$.
3. On considère deux fils infinis parallèles à l'axe $Oz$ situés en $(x = -a, y = 0)$ et $(x = a, y = 0)$ portant respectivement des densités linéiques de charges $-\lambda$ et $+\lambda$. Donner l'expression du potentiel en un point de l'espace défini par les distances $r_1$ et $r_2$ aux deux fils, en choisissant $V = 0$ à égale distance des deux fils.

**Exercice 3 - Charge au centre d'un cube :** Soit une charge ponctuelle.

1. Quelle est le flux du champ électrique au travers d'une sphère de rayon $r$ centrée sur la charge ?

   On considère une charge ponctuelle $q$ placée au centre d'un cube de côté $a$.
2. Déduire de la question précédente en utilisant les symétries du champs le flux du champ électrique à travers une face du cube.
3. Même question si la charge est maintenant placée en un sommet du cube. On pourra essayer de se ramener à la situation précédente.

**Exercice 4 - Décharge d'un condensateur dans l'air :** On constate expérimentalement qu'une boule conductrice de rayon $R$, uniformément chargée et abandonnée dans l'air avec une charge $q_0$ se décharge. Pour interpréter ce phénomène, on suppose que l'air est un milieu faiblement conducteur de conductivité $\sigma$ : la densité de charge $\rho$ est nulle et la densité de courant $\vec{j}$ est fournie par la loi d'Ohm locale. L'origine de l'espace étant prise au centre $O$ de la boule, on adopte les coordonnées sphériques de centre $O$ et on suppose le champ magnétique nul.

1. Déterminer le champ électrique en tout point de l'espace.
2. Donner l'expression de la densité de courant dans l'air.
3. Déterminer $q(t)$ en fonction de $q_0$, $\sigma$, $\epsilon_0$ et $t$.
4. Pourquoi les expériences d'électrostatique sont-elles plus difficiles à réaliser lorsque l'air est humide ?

**Exercice 5 - Pression au centre de la Terre :** On modélise la Terre par une sphère homogène de masse volumique constante $\mu$, de rayon $R_\mathrm{T}$ et de masse totale $M_\mathrm{T}$. On s'intéresse à ce qui se passe dans la Terre, donc pour $r > R_\mathrm{T}$.

1. En admettant la relation de la statique des fluides $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r = \mu\vec{G}(r)$ avec $\vec{G}$ le champ de pesanteur terrestre, montrer que la pression vérifie la loi $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\alpha r$ . Donner l'expression de la constante $\alpha$.
2. Quelle est la pression au centre de la Terre en fonction de $R_\mathrm{T}$, $M_\mathrm{T}$ et de la constante de gravitation universelle $\mathcal{G}$ ? La valeur communément admise de cette pression est 380 GPa, commenter. On donne $\mathcal{G} \approx 6.67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$, $R_\mathrm{T} \approx 6400\,\mathrm{km}$ et $M_\mathrm{T} \approx 6 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$.

**Exercice 6 - Champ gravitationnel terrestre :** On représente la distribution de masse à l'intérieur de la Terre par une masse volumique variant en fonction de la distance $r$ au centre de la Terre (de rayon $R_T$) selon la loi $\mu(r) = \mu_0 \left(1 - \alpha \dfrac{r^2}{R_T^2}\right)$ .

1. Déterminer l'expression du champ gravitationnel $\vec{G}(\vec{r})$ en un point interne de la Terre situé en $\vec{r}$.
2. Vérifier la relation locale de Gauss pour la gravitation. L'expression de la divergence en coordonnées sphériques pour un champ à symétrie sphérique est $\mathrm{div}(f(r)\vec{e}_r) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 f(r)\right)$.

**Exercice 7 - Potentiel électrostatique d'un électrolyte :** On considère un électrolyte globalement neutre comportant des charges positives $+q$ et négatives $-q$. Dans une hypothèse d'équilibre thermodynamique local, la densité de charges positives $\rho_+$ et négatives $\rho_-$ à la température $T$ dans un électrolyte suit une loi de Boltzmann, ce qui conduit à une densité de charge totale :

$$\rho(M) = \rho_0 \exp\left(-\frac{qV(M)}{k_B T}\right) - \rho_0 \exp\left(+\frac{qV(M)}{k_B T}\right),$$

où $\rho_0 = qn_0$ avec $n_0$ la densité moyenne de particules, et $V(M)$ le potentiel électrostatique au point $M$.

On suppose que la répartition de charges est à symétrie sphérique.

1. Donner l'équation vérifiée par le potentiel électrostatique. On rappelle l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques $\Delta f(r) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}\right)$.
2. Dans une hypothèse où loù la température est élevée : $qV \ll k_B T$ dans tout l'électrolyte, vérifier que le potentiel $V(r) = \dfrac{\alpha}{r}\exp\left[-\dfrac{r}{r_0}\right]$ est solution de l'équation précédemment trouvée. Donner l'expression de $r_0$ et commenter la forme du potentiel obtenue.