Colle n° 16 : Electromagnétisme 7

Exercice 1 - Solution ondulatoire des équations de Maxwell : On se place dans le vide de charges et de courants : $\overrightarrow{j}(M,t) = \overrightarrow{0}$ et $\rho(M,t) = 0$ en tout point.

On considère le champ électrique suivant

$$\overrightarrow{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t + kz)\overrightarrow{u_x} + E_0 \sin(\omega t + kz)\overrightarrow{u_y}$$

avec $k = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\omega$.

Donner un champ magnétique associé pour que ce champ électrique soit solution des équations de Maxwell dans le milieu considéré.

Exercice 2 - Solénoïde en régime variable : On étudie un solénoïde de longueur ℓ et de rayon a, constitué de N spires jointives. Ces dernières sont parcourues par un courant $i(t)$. On suppose $\ell \gg a$, de sorte que le solénoïde puisse être considéré comme infini. On suppose que le courant est suffisamment lentement variable pour se situer dans le cadre de l'ARQS magnétique.

1. Calculer le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ à l'intérieur du solénoïde. On supposera $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$ à l'extérieur.
2. En établissant un parallèle formel entre les équations de Maxwell-Faraday et de Maxwell-Ampère dans le cadre de l'ARQS magnétique, justifier que le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E(r,t)\vec{e}_\theta$.
3. On cherche le champ électrique vérifiant l'équation de Maxwell-Faraday. Calculer ce champ induit en fonction de $i(t)$, μ_0, r et $n = N/\ell$. On se limitera au cas $r < a$.
4. En déduire la densité de courant de déplacement puis le champ magnétique $\overrightarrow{B}_\mathrm{d}$ issu de ce seul courant.
5. Vérifier en ordre de grandeur que $\overrightarrow{B}_\mathrm{d}$ est bien négligeable devant le champ B trouvé dans le cadre de l'ARQS magnétique.

   Donnée :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z\ .$$

Exercice 3 - Bilan d'énergie dans un condensateur en ARQS : On considère un condensateur constitué de plaques circulaires de rayon R, disposé en série avec une résistance. L'intérieur du condensateur est un isolant électrique vide de courants et de charges. Le circuit est alimenté par une tension $U(t) = U_0 \cos\omega t$. On se place dans la limite $R \ll c/\omega$.

1. Écrire les équations de Maxwell à l'intérieur du condensateur. Que valent les champ électrique et magnétique dans le condensateur ?
2. Calculer en fonction de $Q(t)$(charge d'une des plaques), $I(t)$ (courant circulant dans le circuit), c et R le rapport

$$x = \frac{B^2}{\varepsilon_0 \mu_0 E^2}\ ,$$

   calculé en $r = R$. Conclure sur la valeur de x en calculant un ordre de grandeur du rapport Q/I.
3. Calculer le vecteur de Poynting associé, puis le flux d'énergie à travers la surface latérale du condensateur. À quoi correspond ce flux ?
4. Vérifier sur cet exemple le théorème de Poynting.

Exercice 4 - Câble coaxial en régime statique : On considère un câble coaxial de longueur ℓ, constitué de deux cylindres d'axe commun (Oz), parfaitement conducteurs, de rayons R_1 et $R_2 > R_1$. On suppose $\ell \gg R_2$. Le cylindre intérieur est porté au potentiel V_1, porte une charge linéique λ et est parcourue par un courant I. Le cylindre extérieur est porté au potentiel $V_2 = V_1 - U$, porte une charge linéique $-\lambda$ et est parcouru par le courant $-I$.

1. Calculer les charges surfaciques σ_i portées par chacun des cylindres.
2. En déduire le champ $\overrightarrow{E}$ en tout point ainsi que la densité d'énergie électrique associée. En déduire la densité d'énergie linéique w_E.
3. En déduire la capacité linéique Γ du câble.

4. Calculer les courants surfaciques sur les deux conducteurs, et en déduire le champ magnétique.
5. Calculer la densité linéique w_B d'énergie magnétique. En déduire l'inductance linéique Λ.
6. Quelle est la valeur du produit $\Gamma\Lambda$? Quelle est sa dimension ?
7. Quelle impédance peut-on former à partir de Λ et Γ ? Trouver son expression en fonction de R_1 et R_2.
8. Calculer le vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$ dans le cable, ainsi que le flux d'énergie Φ associé. Commenter.

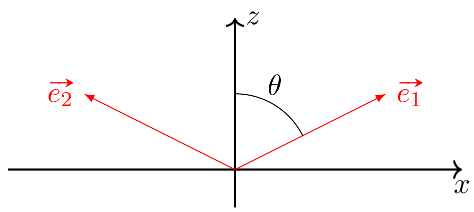
Exercice 5 - Rayon classique de l'électron : L'observation d'un électron isolé dans un piège de Penning démontre que le rayon de cette particule est inférieur à $10 \times 10^{-22}\,\text{m}$.

On souhaite représenter classiquement un électron. Pour cela, on suppose qu'il est représenté par une sphère de rayon R_c uniformément chargée en volume, trouver une expression du rayon R_c en identifiant l'énergie électrostatique de cette distribution avec l'énergie de masse $m_e c^2$ de l'électron, qui correspond à l'énergie mécanique de la particule dans un référentiel où elle est au repos. Proposer un ordre de grandeur sachant que $m_e c^2 = 511\,\text{keV}$ et conclure. On rappelle $1\,\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\,\text{J}$.

Exercice 6 - Étude de l'OPPM associée à un rayon laser : On considère un faisceau laser de puissance moyenne $\langle P \rangle = 1\,\text{mW}$ et de section $s = 4\,\text{mm}^2$ modélisé par une onde électromagnétique monochromatique se propageant dans le vide dont le champ électrique est de la forme : $\overrightarrow{E}(z,t) = E_0 \cos(k(z - ct) + \phi_0)\vec{e}_x$.

1. Décrire précisément les différents termes intervenant dans cette écriture et leur signification physique. Décrire l'état de polarisation. Montrer en écrivant la relation de dispersion liant la norme du vecteur d'onde k à la pulsation ω, que l'on peut écrire de façon équivalente $\overrightarrow{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t + \phi_0)\vec{e}_x$.
2. Exprimer le champ magnétique attaché à cette onde.
3. Exprimer le vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$. En déduire l'expression littérale de l'amplitude du champ électrique E_0 en fonction de la puissance moyenne $\langle P \rangle$ et de s, de la célérité de la lumière dans le vide et de ϵ_0. Donner sa valeur numérique. On rappelle que $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\,\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$.

Exercice 7 - Interférences : On étudie l'onde résultant de la superposition dans le vide de deux ondes électromagnétiques planes de même pulsation ω, de même amplitude E_m, polarisées rectilignement suivant (Oy). Elles se propagent selon deux directions $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$, contenues dans le plan (Oxz) et faisant entre elles un angle 2θ : $(\vec{e_1}, \vec{e_2}) = 2\theta$. Les ondes sont en phase à $t = 0$ et à l'origine du repère. L'axe (Oz) est choisi tel que $(\vec{e_1}, \vec{e_z}) = \theta$:



1. Établir l'expression du champ électrique résultant. Quelle est sa vitesse de phase v_ϕ ? L'onde est-elle plane ?
2. Donner l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{B}$.
3. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting Π et en déduire la répartition de l'éclairement (donné par le carré de la la norme du vecteur de Poynting) sur une surface perpendiculaire à $\overrightarrow{\Pi}$. Commenter.