Mesures et incertitudes

Formation dans le cadre du programme de Physique-Chimie du lycée 2019

Maxime Champion - Version du 28 avril 2025

Table des matières

Conformément au programmes du lycée, les notions présentées se veulent conformes aux règles internationales, définies par le *Bureau International des Poids et Mesure* dans le document fondamental *Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure* (souvent cité en tant que « GUM »).

Ce document scientifique de référence est disponible en français sur le site officiel du BIPM :

`https://www.bipm.org/en/committees/jc/jcgm/publications`

Au niveau lycée, la lecture du document ressource Eduscol rédigé par Julien Browaeys, universitaire et inspirateur du programme, est conseillée. Il contient en particulier de nombreuses activités directement réalisables en classe. Il est disponible sur le site :

`https://eduscol.education.fr/document/7067/download`

Le déroulé de ce document prend à de nombreuses reprises appui sur ce document Eduscol.

Remarque préliminaire

L'évaluation des incertitudes de mesure est toujours un point délicat du travail expérimental. Toutefois, cette difficulté est réelle et intrinsèque à toute mesure, quel que soit le niveau de l'expérience. Pour introduire et essayer de « démystifier » les incertitudes, il est toujours intéressant de garder en tête la remarque suivante issue du GUM :

« *Bien que ce Guide fournisse un cadre pour l'estimation de l'incertitude, il ne peut remplacer ni la réflexion critique ni l'honnêteté intellectuelle ni la compétence professionnelle. L'évaluation de l'incertitude n'est jamais une tâche de routine ni une opération purement mathématique ; elle dépend de la connaissance détaillée de la nature du mesurande et du mesurage. La qualité et l'utilité de l'incertitude fournie pour le résultat d'un mesurage dépendent, en fin de compte, de la compréhension, de l'analyse critique et de l'intégrité de [celles et] ceux qui contribuent à son évaluation.* »

GUM 2008 (dernière version) - 3.4.8

1 Classe de seconde générale

1.1 Rappel du programme officiel

En classe de seconde, l'objectif principal est de sensibiliser l'élève, à partir d'exemples simples et démonstratifs, à la variabilité des valeurs obtenues dans le cadre d'une série de mesures indépendantes d'une grandeur physique. L'incertitude-type fournit alors une estimation de l'étendue des valeurs que l'on peut raisonnablement attribuer à la grandeur physique.

Les activités expérimentales proposées visent aussi à sensibiliser l'élève à l'influence de l'instrument de mesure et du protocole choisi sur la valeur de l'incertitude-type.

Lorsque cela est pertinent, la valeur mesurée sera comparée avec une valeur de référence afin de conclure qualitativement à la compatibilité ou à la non-compatibilité entre ces deux valeurs.

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique.	Exploiter une série de mesures indépendantes d'une grandeur physique : histogramme, moyenne et écart-type. Discuter de l'influence de l'instrument de mesure et du protocole. Évaluer qualitativement la dispersion d'une série de mesures indépendantes. **Capacité numérique :** Représenter l'histogramme associé à une série de mesures à l'aide d'un tableur.
Incertitude-type.	Expliquer qualitativement la signification d'une incertitude-type et l'évaluer par une approche statistique.
Écriture du résultat. Valeur de référence.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure. Comparer qualitativement un résultat à une valeur de référence.

1.2 Éléments théoriques

L'auteur de ce document interprète le programme comme ne nécessitant pas de prise de la moyenne pour évaluer une incertitude-type. Ainsi, on se restreint ici à l'évaluation de l'incertitude sur une valeur unique. Cette interprétation du programme permet de garder pour la classe de première les subtilités sur les moyennes.

1.2.1 La variabilité en science expérimentale

Une expérience de mesure en science expérimentale est un processus généralement complexe qui entremêle de très nombreux processus. Cette complexité se traduit systématiquement par une variabilité de la mesure, qui implique que la répétition de l'ensemble de la mesure conduit généralement à une valeur mesurée sensiblement différente de la première. Cette variabilité est naturelle et fait intrinsèquement partie de la mesure. Il ne faut pas chercher à la faire disparaître, bien au contraire, elle renferme généralement une grande richesse d'information sur le processus physique !

Cette variabilité peut provenir de nombreux aspects, dont les principaux sont les suivants :

- le choix de la méthode de mesure ;

  > **Exemple 1 :** *Choisir de mesurer un petit élément à la règle graduée ou au pied à coulisse n'implique pas la même précision !*

- les variations de l'environnement ;

  > **Exemple 2 :** *Si l'on souhaite mesurer la célérité du son avec un protocole se déroulant sur une journée complète, comme la température de l'air va évoluer au cours du temps, la célérité du son aussi.*

- les instruments de mesure ;

  > **Exemple 3 :** *Mesurer une tension avec deux voltmètres semblant identiques amène parfois à une mesure de tension légèrement différente.*

- le processus physique lui-même ;

  > **Exemple 4 :** *Par exemple, une expérience de mécanique quantique est intrinsèquement variable car la mécanique quantique ne prédit que des lois de probabilité.*

- et surtout, la personne réalisant l'expérience.

Généralement au niveau scolaire, la personne réalisant l'expérience est la principale cause de variabilité de la mesure. Par ses gestes, ses choix et sa technique, cette personne introduit une variabilité importante. Il est donc totalement naturel que deux personnes réalisant la même expérience, dans les mêmes conditions, avec le même matériel, trouvent des valeurs différentes.

Il est à noter que le but de toute formation expérimentale, de la maternelle jusqu'au plus haut niveau universitaire et professionnel, est de patiemment faire diminuer cette variabilité. En acquérant chaque année des nouvelles connaissances et de nouvelles compétences, un·e étudiant·e peut donc patiemment réussir à faire diminuer son impact personnel sur la variabilité d'une mesure.

1.2.2 L'incertitude-type

Définition. La quantification de la variabilité d'une mesure x d'une grandeur est appelée **incertitude-type** et notée $u(x)$.
Par définition, l'incertitude-type correspond à l'**écart-type** de la distribution des données issues d'une répétition de la mesure.

Cette définition est l'unique définition qui couvre tous les cas qui seront étudiés ultérieurement. Elle se suffit à elle-même.

Attention ! Pour éviter les confusions avec un intervalle de valeurs, il est conseillé de spécifier les deux informations de façon séparée, à savoir $x = \ldots$ d'une part et $u(x) = \ldots$ d'autre part. La notation $\pm$ est à proscrire dans le cadre d'un premier enseignement.

On fera à ce stade deux remarques :

- pour estimer l'incertitude-type du résultat d'une **unique** mesure, il faut donc répéter un grand nombre de fois le processus de mesure. Cette répétition et les valeurs supplémentaires servent uniquement à estimer la variabilité du processus de mesure.
- l'incertitude-type est l'estimation d'une variabilité qui est unique à chaque processus de mesure. Il est donc naturel que deux personnes réalisant exactement la même expérience observent une variabilité du résultat, et donc une incertitude-type, différente.

Propriété. La variabilité d'un processus de mesure avec un protocole, du matériel et des conditions expérimentales données, impliquant une ou plusieurs personnes dans l'expérience, est mesurée par une unique incertitude-type.

Incertitude-type « relative » : On peut définir de plus l'incertitude-type de mesure « relative » la grandeur $u(x)/x$, que l'on donne généralement en pourcentage.

1.2.3 Interprétation de l'incertitude-type

Revenons à la définition de l'incertitude-type. Soit un ensemble de N mesures notées x_i avec i allant de 1 à N.

On définit la **moyenne** $\bar{x}$ de l'ensemble, qui nous permet de définir l'écart-type, et donc l'incertitude-type, grâce aux relations

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \text{et} \quad u(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}\ .$$

Ces relations ne sont pas à connaître et les estimations de ces grandeurs doivent être faites avec des outils numériques (ordinateur, calculatrice...).

> ***Remarque :*** *Il peut y avoir une interrogation dans la définition de l'écart-type par rapport à celle étudiée en mathématiques, concernant la division par $N-1$ ou N. On pourra consulter à ce titre l'élément 8 du document Eduscol. Concrètement, cela n'a aucune d'importance au lycée.*

Il est à noter qu'il n'y a qu'une incertitude-type $u(x)$ pour l'ensemble des mesures x_i, et non pas une pour chacune. En effet, l'incertitude-type caractérise la variabilité d'un processus de mesure, et donc toutes les mesures issues de ce processus ont logiquement la même incertitude-type.

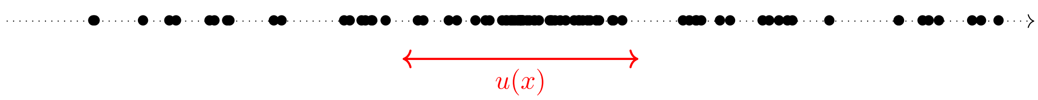


Fig. 1 – Représentation d'une série de 100 mesures d'une grandeur x ainsi que de la largeur de l'incertitude-type de cet ensemble.

La figure 1 représente une distribution de mesures ainsi que l'incertitude-type. En moyenne, deux valeurs prises au hasard sont séparées de quelques $u(x)$. Toutefois, on constate aussi que quelques points sont très éloignés des autres. Il ne s'agit pas de points aberrants, mais de valeurs dans des domaines peu fréquents mais tout de même possibles.

Propriété. L'incertitude-type permet de quantifier la variabilité d'une mesure. Ainsi, deux mesures x_1 et x_2 issues du même processus sont séparées en moyenne de quelques $u(x)$ par construction de l'incertitude-type en tant qu'écart-type.

1.3 Quelques remarques sur certaines capacités exigibles en classe de seconde

La notion d'écart-type est au programme de mathématiques de seconde générale. Il est conseillé si possible de se concerter avec l'enseignant·e de mathématiques avant d'introduire ces notions.

On fait remarque de plus que les capacités ci-dessous sont souvent totalement adaptées à une évaluation dans des exercices ou dans des devoirs écrits.

1.3.1 Évaluer qualitativement la dispersion d'une série de mesures indépendantes.

Cette compétence peut se traiter préalablement au calcul informatique. En effet, elle peut se construire via la construction « à la main » d'un histogramme. Ensuite, qualitativement, la dispersion des mesures est donnée par la demi-largeur évaluée « à la main » de la distribution. Ceci est en effet approximativement le cas pour les distributions courantes, par exemple pour une gaussienne la demi-largeur à mi-hauteur correspond à 1.2 fois l'écart-type.

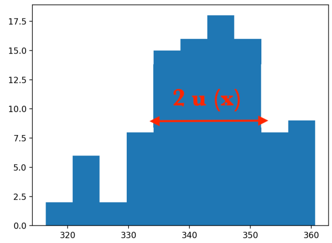


Fig. 2 – Évaluation qualitative de la dispersion d'une série de mesures : ici $u(x) \approx 10$.

1.3.2 Comparer qualitativement un résultat à une valeur de référence.

Cette compétence est centrale et se base sur la définition de l'incertitude-type. Celle-ci quantifie l'écart moyen entre deux valeurs mesurées. Ainsi, par définition, l'écart entre le résultat de la mesure et la valeur de référence doit être au maximum de quelques incertitudes-types.

Concernant l'écart relatif : On voit encore trop souvent l'écart relatif, à savoir $g = \dfrac{|m - m_{\text{ref}}|}{m_{\text{ref}}}$. Cet écart quantifie ce qu'on appelait « l'erreur ». Elle n'a pas d'intérêt pratique, est source de confusion et implique généralement des raisonnements peu, voire pas, rigoureux.

Que conclure si on trouve 1%, 20% ou 50% ? Que l'on s'est trompé d'autant ? Que c'est bien si ce pourcentage est faible ? Mais que veut dire faible ? Et surtout quel rapport avec la notion d'incertitude-type introduite dans le programme ?

La seule façon raisonnable de procéder et de comparer $|m - m_{\text{ref}}|$ et $u(m)$. On peut avoir un écart relatif de 1% et une mesure totalement incompatible (si l'incertitude-type est très très faible) ou à l'inverse un écart relatif de 50% et une mesure compatible (si l'incertitude-type est grande).

La notion d'écart relatif est hors programme et source de confusion, il est nécessaire de la bannir totalement de tout enseignement de la physique-chimie au lycée.

1.3.3 Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.

L'incertitude-type doit être écrite en utilisant la même puissance de 10 que celle de la valeur mesurée, et évidemment la même unité. On peut garder deux chiffres significatifs pour l'incertitude type pour éviter les erreurs d'arrondis.

Pour plus de détails, on peut se reporter aux éléments 23 à 25 de la ressource Eduscol d'où est issu le tableau 1 donné pour exemple.

1.3.4 Exploiter une série de mesures indépendantes d'une grandeur physique : histogramme, moyenne et écart-type.

Cette capacité doit être envisagée uniquement numériquement, elle est liée à la capacité numérique « représenter l'histogramme associé à une série de mesures à l'aide d'un tableur. »

Faire un histogramme avec OpenOffice ou LibreOffice n'est pas aisé, il n'y a pas de procédure automatisée et il faut manuellement définir les classes et calculer les effectifs correspondants. En revanche, c'est très simple à l'aide d'Excel ou de GoogleSheet.

Pour les détails pratiques concernant ces tableurs, on peut se reporter à l'élément 10 de la ressource Eduscol.

Il est conseillé d'utiliser Python, le tracé d'histogramme y est particulièrement aisé, on peut se reporter à l'élément 11 de la ressource Eduscol.

L'utilisation d'une calculatrice graphique permet aussi de réaliser toutes ces opérations directement.

Grandeur	Valeur mesurée	Incertitude-type	Écriture standardisée (ce qui suit ± est l'incertitude-type)
Distance	742310,1 m	777,32 m	L = (7,4231 ± 0,0078) × 10^5 m
Distance	8231,34 m	3,449 m	L = (8,2313 ± 0,0034) × 10^3 m
Distance	9,42136 mm	4 µm	L = (9,4214 ± 0,0040) × 10^{-3} m
Temps	0,014280 s	0,000312 s	T = (1,428 ± 0,031) × 10^{-2} s
Temps	0,0028534 s	0,000451 s	T = (2,85 ± 0,45) × 10^{-3} s
Temps	0,000284 s	0,000436 s	T = (2,8 ± 4,4) × 10^{-4} s
Résistance	1,10876 mΩ	333 µΩ	R = (1,11 ± 0,33) × 10^{-3} Ω
Résistance	4,2032 MΩ	5,3 kΩ	R = (4,2032 ± 0,0053) × 10^6 Ω
Intensité	45 A	0,32 kA	I = (0,5 ± 3,2) × 10^2 A
Intensité	45 µA	4,4 mA	I = (0,0 ± 4,4) × 10^{-3} A

Tab. 1 – Exemple d'écriture des chiffres significatifs. L'écriture avec le symbole $\pm$ permet l'écriture synthétique mais est déconseillée. Tableau issu de l'élément 25 de la ressource Eduscol.

1.4 À propos de la régression linéaire

Dans plusieurs activités expérimentales de seconde et des années suivantes, la régression linéaire semble être un outil approprié.

Il est à noter que le terme « régression linéaire » n'est **pas** au programme du lycée. Il n'apparaît jamais. Ce terme apparaît pour la première fois dans les programmes de première année de Classes Préparatoires aux Grandes Écoles.

Autrement dit, la maîtrise de cet outil **ne peut pas** et surtout **ne doit pas** être un objectif du lycée. Cela s'explique en particulier par la difficulté de compréhension du traitement des incertitudes avec cet outil.

En effet, supposons que l'on cherche à vérifier un modèle $y = ax + b$ et que l'on ait, après expérience, un ensemble de valeurs expérimentales $\{x_i\}$ et $\{y_i\}$ qui possèdent chacun une certaine variabilité.

La régression linéaire simple permet, à partir de l'ensemble des points expérimentaux, de trouver une valeur de a et une valeur de b. Avec les choix du programme du lycée, pour estimer l'incertitude-type de ces paramètres, il faut réaliser des ensembles de nouvelles mesures $\{x_i, y_i\}$ puis réaliser une nouvelle régression linéaire. En réalisant un grand nombre de fois cette opération, on obtient, en prenant les écarts-types, les valeurs des incertitudes-types sur les paramètres. Ce procédé est impossible en pratique.

Ainsi, au lycée, soit on se situe dans le cas $b = 0$, ce qui sera très majoritairement le cas, et donc la régression linéaire est totalement superflue car $a = y/x$ peut être traité avec des outils statistiques. Soit b est différent de 0 et dans ce cas, au niveau lycée, on ne traite pas les incertitudes.

Tous les exercices nécessitant l'utilisation d'une droite de tendance doivent faire l'impasse sur les incertitudes et présenter la régression linéaire comme une boîte noire que l'on ne cherche pas à expliciter.

Pour une discussion plus détaillée sur l'utilité ou non de la régression linéaire, on peut se reporter à la série d'articles de J. Browaeys et T. Beau « *La relation de conjugaison et la régression linéaire.* » parue dans les BUP 1032 à 1034, disponible en libre accès sur la page internet :

https://cv.archives-ouvertes.fr/browaeys

1.5 Propositions d'activités

Les exercices présentés ici peuvent être utilisés en tant que tel ou faire l'objet d'un traitement directement lors d'une séance de travaux pratiques.

1.5.1 Exercice - Précision de la verrerie en chimie

On souhaite comparer la qualité de prélèvement de 100 mL d'eau à l'aide d'un bécher, d'une éprouvette graduée et d'une fiole jaugée.

Pour cela, une cinquantaine de prélèvements ont été effectués avec chaque verrerie, puis la quantité d'eau prélevée a été pesée. Ainsi, en connaissant la masse volumique de l'eau, on est en capacité de mesurer précisément le volume de liquide prélevé.

	Moyenne	Écart-type	Nombre de prélèvements
Bécher	98.7 mL	1.6 mL	37
Éprouvette graduée	99.5 mL	0.6 mL	65
Fiole jaugée	100.1 mL	0.3 mL	49

1. Est-ce que ces informations permettent de savoir quel dispositif permet d'obtenir le volume de la plus proche de 100 mL lors d'un unique prélèvement ?
2. Quelle est l'incertitude-type associée à un prélèvement avec chaque récipient ?
3. En déduire la verrerie la plus raisonnable à utiliser pour espérer le prélèvement le plus reproductible ?

Corrigé :

1. Sur un prélèvement unique, on ne pas savoir quel sera le prélèvement le plus précis. En effet, à cause de la variabilité du prélèvement, il est possible de réaliser une fois un meilleur prélèvement avec un bécher qu'avec une fiole jaugée !
2. L'incertitude-type est simplement l'écart-type de la distribution. Le nombre de prélèvements n'a aucune utilité ici, on cherche en effet à estimer l'incertitude-type d'une mesure unique et non pas celle de la moyenne.
3. Toutefois, la fiole jaugée à l'écart-type le plus faible. Ainsi, il est raisonnable d'espérer un meilleur prélèvement avec un tel dispositif car, en moyenne, le prélèvement est plus proche du volume attendu.

1.5.2 Exercice - Mesure de la vitesse du son

Un émetteur d'ultrasons est alimenté par une source de tension continue de 15 V est réglé de façon à envoyer un signal en salves (signal intermittent).

Un récepteur ultrasonore transforme l'onde ultrasonore, à l'endroit où il est situé, en une tension électrique de même fréquence et d'amplitude proportionnelle à celle de l'onde. On utilise deux récepteurs seront donc connectés aux entrées d'un oscilloscope afin de visualiser les signaux.

L'émetteur et les récepteurs sont placés sur un banc acoustique gradué permettant de relever leur position.

1. Au cours d'une première mesure, un premier groupe d'élèves mesure un temps de vol de 0.59 ms pour des émetteurs séparés de 20 cm. En déduire la valeur calculée de la célérité du son.

Une série de 9 mesures supplémentaires est réalisée, permettant de tracer l'histogramme ci-dessous (figure 3).

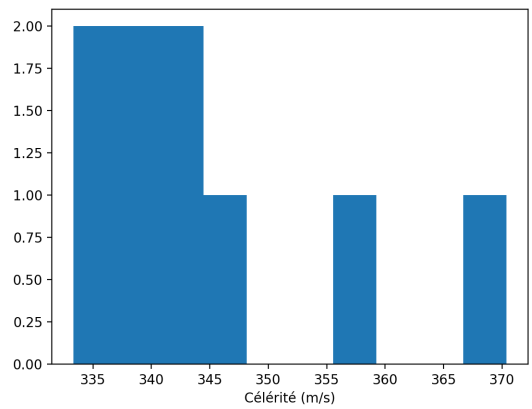


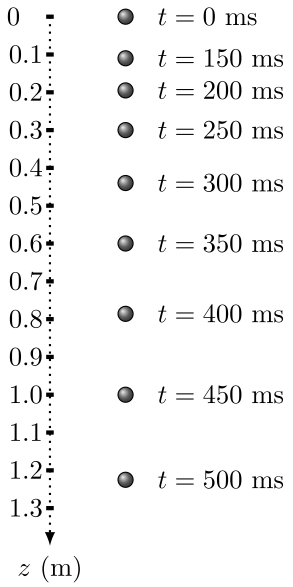
Fig. 3 – Distribution des dix valeurs expérimentales de vitesse

2. Donner une valeur approchée de l'incertitude-type du processus de mesure.
3. Cette mesure est-elle compatible avec la valeur de référence 343 m/s vue en cours ?

Corrigé :

1. On a $c = d/\tau = 339\,\mathrm{m/s}$.
2. Sur cette distribution, on trouve un écart-type de l'ordre de $u(c) = 10\,\mathrm{m/s}$.
3. La valeur du cours est de 340 m/s. La différence entre la valeur de référence et la valeur mesurée est très inférieure à l'incertitude-type, la mesure est compatible avec la valeur de référence.

1.5.3 Exercice - Étude de la vitesse d'une chute libre



La chute verticale d'une bille est étudiée par chronophotographie. On lâche la bille à $t = 0$ sans vitesse initiale de la position $z = 0$, l'axe vertical Oz étant orienté vers le bas.

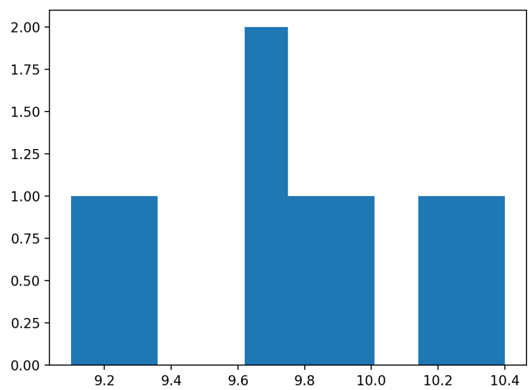
1. Mesurer les positions à chaque instant à partir de la chronophotographie.
2. Calculer la norme v du vecteur vitesse moyenne entre chaque instant de la chronophotographie puis calculer v/t avec t le temps moyen de chaque vitesse et le représenter sur un histogramme.
3. Les valeurs de v/t semblent-t-elles compatibles avec $g = 9.81\,\mathrm{m/s}$, l'accélération de pesanteur ? L'étude théorique justifiant cela sera réalisée les années suivantes en spécialité.

Corrigé :

1. On obtient les résultats suivants, l'incertitude expérimentale étant d'une unité sur le dernier chiffre :

t (ms)	0	150	200	250	300	350	400	450	500
z (m)	0	0.11	0.19	0.30	0.44	0.60	0.79	1.00	1.22
$\bar{v}$ (m/s)	0.73	1.6	2.2	2.8	3.2	3.9	4.2	4.4	$\varnothing$
$\bar{v}/\bar{t}$ (m/s^2)	9.7	9.1	9.7	10.2	9.8	10.4	9.9	9.3	$\varnothing$

   La vitesse représente la vitesse moyenne entre un instant et le suivant.
2. Voir le tableau ci-dessus.
3. On obtient l'histogramme ci-dessous. On trouve $u(g) = 0.42\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Toutes les valeurs mesurées ont un écart avec g de l'ordre de quelques incertitudes-type, elles sont toutes compatibles avec.




```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

g = np.array([9.7,9.1,9.7,10.2,9.8,10.4,9.9,9.3])

# Tracé histogramme

plt.hist(c)
plt.show()

# Calcul de l'écart-type
std = np.std(g,ddof=1)

print('Ecart type =', std)
```

1.5.4 Activités expérimentales

Verrerie de chimie : Le TP sur la verrerie est un TP fondateur. Il permet de manipuler la verrerie pour apprendre le geste tout en introduisant les incertitudes. Pour cela, avec différentes verreries, on propose de prélever un volume de 10 mL puis de peser la masse d'eau correspondante à l'aide d'une balance de précision. En utilisant la masse volumique à la température donnée, on peut remontrer au volume prélevé. En reproduisant environ 5 mesures par groupes, on peut rapidement avoir un échantillon d'un grand nombre de valeur pour réaliser une étude statistique. Cette démarche permet de démontrer expérimentalement la précision des différentes verreries.

Cette expérience étant fondatrice, un article dans le BUP sera prochainement publié sur le sujet. Il est disponible d'ici là sur le lien :

https://mchampion.fr/Formations/Article_BUP_variabilite.pdf

Mesure au chronomètre : Lors d'une mesure mécanique de chute libre, en plus d'un traitement vidéo, il est possible de réaliser plusieurs chutes simples de l'objet et de mesurer au chronomètre son temps de chute. Le temps mesuré sera fortement dispersé et permet de mettre en lumière les concepts sur les incertitudes. Pour aller plus loin, on peut même calculer $\frac{2h}{t^2}$ avec h la hauteur de chute puis comparer statistiquement ce résultat à g (sans donner d'explications théoriques à ce stade).

Test de la troisième loi de Descartes : Pour mesurer l'indice optique du milieu transparent, mesurer un ensemble d'angles d'incidence/réfraction et calculer $n = \frac{\sin i_1}{\sin i_2}$ pour chaque couple puis faire un traitement statistique.

Mesure d'une résistance : Pour une résistance donnée, faire varier la tension à ses bornes, la mesurer ainsi que le courant la traversant. Pour chaque mesure, calculer U/I puis faire un traitement statistique.

2 Classe de première spécialité

2.1 Rappel du programme officiel

En complément du programme de la classe de seconde, celui de la classe de première introduit l'évaluation de type B d'une incertitude-type, par exemple dans le cas d'une mesure unique effectuée avec un instrument de mesure dont les caractéristiques sont données.

Lorsqu'elle est pertinente, la comparaison d'un résultat avec une valeur de référence est conduite de manière qualitative ; un critère quantitatif est introduit dans le programme de spécialité physique-chimie de la classe de terminale.

De même, les incertitudes composées sont abordées en classe de terminale.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique.	Exploiter une série de mesures indépendantes d'une grandeur physique : histogramme, moyenne et écart-type. Discuter de l'influence de l'instrument de mesure et du protocole. Évaluer qualitativement la dispersion d'une série de mesures indépendantes. **Capacité numérique :** Représenter l'histogramme associé à une série de mesures à l'aide d'un tableur.
Incertitude-type.	~~Expliquer qualitativement la signification d'une incertitude-type et l'évaluer par une approche statistique.~~ Définir qualitativement une incertitude-type. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B).
Écriture du résultat. Valeur de référence.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure. Comparer qualitativement un résultat à une valeur de référence.

En rouge les modifications par rapport au programme de seconde générale.

2.2 Éléments théoriques

2.2.1 Expériences avec variabilité observée (incertitudes de type A)

Lorsque la variabilité des mesures est accessible, il convient de répéter un grand nombre de fois le processus mesure pour estimer l'incertitude-type sur une unique réalisation de la mesure.

Toutefois, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.2.3, certains points de mesure ont statistiquement une chance d'être très éloignés des autres.

Pour gagner en précision, nous pouvons utiliser les différents points de mesures effectués pour aller plus loin qu'une simple estimation de l'incertitude-type sur une mesure unique.

Nous **changeons donc d'expérience**, l'expérience n'est plus « mesurer un point à l'aide d'un protocole » mais « mesurer la moyenne de N points effectués avec le même protocole ». Cette expérience est différente et a donc une incertitude-type différente. L'intérêt de la moyenne est qu'elle va réduire les variabilités.

Pour estimer l'incertitude-type de cette moyenne, il faut par définition reproduire un grand nombre de fois l'expérience et calculer l'écart-type de la distribution obtenue. Or chaque expérience est déjà la reproduction de la mesure unique un grand nombre de fois, on comprend bien que cette opération peut vite être chronophage. Heureusement, il existe une formule mathématique permettant d'estimer cet écart-type.

Propriété. On réalise N fois le même protocole pour obtenir l'ensemble des points expérimentaux $\{x_i\}$. On note l'incertitude-type $u(x)$ de cet ensemble de mesures qui est évaluée en calculant son écart-type.

Le résultat de l'expérience est $\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$ la moyenne de la distribution et avec l'incertitude-type donnée par $\boxed{u(\bar{x}) = \frac{u(x)}{\sqrt{N}}}$.

Ainsi, en une série de mesure, on obtient les points expérimentaux, leur incertitude-type, la moyenne de ces points et grâce à cette formule, l'incertitude-type sur la moyenne. On obtient ainsi une estimation plus précise de la grandeur à mesurer en modérant la variabilité de la mesure unique.

Pour plus de détails, on peut se reporter à l'élément 17 du document Eduscol.

2.2.2 Expériences sans variabilité observée (incertitudes de type B)

Certaines expériences n'ont pas de variabilité observée. Cela signifie qu'en reproduisant la mesure, on retrouve systématiquement le même résultat. C'est par exemple le cas lorsque l'on mesure naïvement la taille d'un objet avec la même règle graduée. Logiquement, reproduire la mesure n'apporte pas d'information.

Cette absence de variabilité observée n'implique pas une absence de variabilité. Cela signifie juste qu'à l'échelle de cette expérience, avec l'appareil de mesure choisi, la variabilité est plus faible que la précision de la mesure.

Ce phénomène n'est pas uniquement lié à l'appareil de mesure. En effet, selon les conditions expérimentales, il n'est parfois pas matériellement possible (ou souhaité) de reproduire le processus de mesure. Dans ce cas, une seule valeur est accessible et il faut tout de même estimer son incertitude-type.

Il faut donc estimer théoriquement la variabilité de la mesure sans l'observer. Nécessairement, cela est possible sous certaines hypothèses qui ne seront pas forcément adaptées à toutes les expériences.

Propriété. Lors d'une mesure sans variabilité observée, on estime la plus petite plage dans laquelle l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée. On note $\bar{x}$ la valeur centrale de cette plage et Δ sa demi-largeur que l'on appellera **précision** de la mesure. Autrement dit, l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée dans l'intervalle $[\bar{x} - \Delta, \bar{x} + \Delta]$.

Dans ce cas, le résultat de la mesure est $\boxed{\bar{x}}$ avec $\boxed{u(\bar{x}) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}}$.

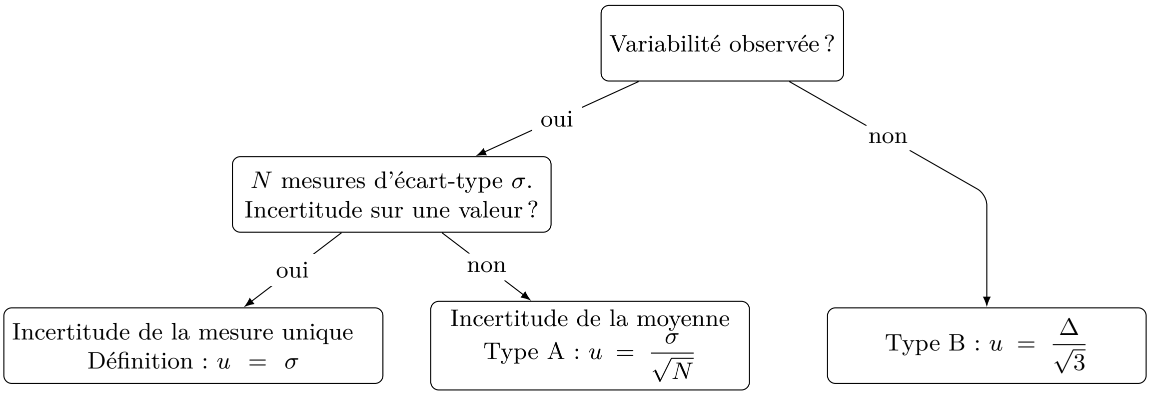
Comme toute incertitude-type, elle représente l'écart-type de la distribution uniforme des données comprises dans l'intervalle $[\bar{x} - \Delta, \bar{x} + \Delta]$.

Insistons sur deux remarques :

- ▷ L'intervalle Δ doit être pris le plus faible possible selon les critères personnels de l'expérimentateur et selon les conditions de l'expérience. Il ne doit pas y avoir de règle générale. Par exemple avec une règle graduée au millimètre, si la valeur tombe directement sur une graduation, il est naturel de prendre $\Delta = 0.25\,\mathrm{mm}$, tandis que si la valeur est entre deux graduations, on prendra plus logiquement $\Delta = 0.5\,\mathrm{mm}$. Et enfin, un étudiant peu sûr de lui peut choisir de prendre dans le même cas $\Delta = 1\,\mathrm{mm}$.
- ▷ Pour les appareils de mesure numérique, il est nécessaire de consulter la notice de l'appareil. Toutefois, bien souvent, les notices ne précisent pas clairement la nature de la valeur de la précision fournie (est-ce une incertitude-type ? un intervalle ? un écart-type d'une distribution gaussienne ?). Dans ce cas, on suppose que l'incertitude affichée sur la notice est un intervalle Δ de certitude de trouver la mesure.

Pour plus de détails, on peut se reporter à l'élément 18 du document Eduscol.

2.2.3 Schématisation du choix de la méthode d'estimation de l'incertitude



2.3 Simulation Monte-Carlo

La simulation Monte-Carlo n'est pas explicitement au programme de première. Toutefois, à moins de faire le calcul direct de l'écart-type de la distribution de probabilité homogène, sa présentation en classe de première permet d'illustrer la notion d'incertitude de type B.

Définition. Un algorithme utilisant la variabilité d'une mesure pour simuler un calcul d'incertitude fait parti des **algorithmes de type Monte-Carlo**.

> ***Remarque :*** *Les algorithmes de Monte-Carlo sont nombreux et ont de nombreuses applications. Leur point commun est qu'ils sont basés sur un processus aléatoire simulé informatiquement.*

Pour cela, on réaliser un tirage aléatoire selon une distribution de probabilité uniforme connue puis on calcule l'écart-type de la distribution obtenue.

On peut la réaliser par exemple sous python avec le code suivant, présent sous forme de Google Colab en cliquant ici[1] :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Nombre de simulation de vitesse (ne pas dépasser 1 000 000)

N = 1000

# Bornes de la simulation
cmin = 300
cman = 380

# Simulation des vitesses
# tc est une liste de N éléments compris aléatoirement entre cmin et cmax
tc = np.random.uniform(cmin,cmax,N)

# Tracé histogramme

plt.hist(tc, bins='rice', histtype = 'step')
plt.show()

# Calcul de l'écart-type
std = np.std(tc,ddof=1)

print('Ecart type =', std)
```

On constate alors que l'écart-type vaut bien $\Delta/\sqrt{3}$ avec Δ la demi-largeur de la distribution uniforme.

Cette simulation a pour but de faire apparaître concrètement la formule comme un écart-type. Il est possible de faire cette simulation avec n'importe quel tableur en utilisant les fonctions aléatoires de ceux-ci.

2.4 Propositions d'activités

Les exercices présentés ici peuvent être utilisés en tant que tel ou faire l'objet d'un traitement directement lors d'une séance de travaux pratiques.

1. https://bit.ly/3doSBHd

2.4.1 Exercice - Mesure d'absorbance pour déterminer une concentration inconnue

On souhaite connaître la quantité de colorant alimentaire E131 dans un bonbon gélifié.

Pour cela, on souhaite mesurer l'absorbance d'un solution dans laquelle le bonbon aura été dissout. Pour cela, on prépare cinq solutions étalonnées en concentration de E131. La préparation de ces solutions implique une pesée du colorant solide, une dissolution, un prélèvement puis une dilution.

La mesure au spectromètre est réalisée à $\lambda = 640\,\text{nm}$, la longueur d'onde présentant le maximum d'absorbance. L'incertitude-type d'une mesure du spectromètre est négligeable.

Un premier groupe d'élèves prépare les solutions et mesure les valeurs suivantes.

c (en mol/L)	2×10^{-5}	1.5×10^{-5}	1×10^{-5}	5×10^{-6}	2×10^{-6}
$A_{640\,\text{nm}}$	1.719	1.372	0.768	0.442	0.201

On rappelle que la loi de Beer-Lambert implique, aux faibles concentrations, la relation $A = kc$ avec k une constante.

Détermination de la concentration pour un groupe d'élève :

1. Déterminer une valeur de k ainsi que son incertitude-type sur une mesure unique.
2. Un bonbon gélifié est entièrement dissous dans $50\,\text{mL}$ d'eau (d'incertitude-type négligeable), l'absorbance mesurée de cette solution est de 0.778. En déduire la concentration de la solution ainsi que son incertitude-type.
3. La masse molaire du E131 est de $M = 582.66\,\text{g/mol}$ et est d'incertitude-type négligeable. En déduire la masse de colorant dans le bonbon ainsi que son incertitude-type.

Utilisation d'une droite d'étalonnage : Plutôt que de réaliser un traitement statistique sur les données étalonnées, on souhaite utiliser une droite d'étalonnage.

4. Déterminer la valeur de k à l'aide d'une régression linéaire.
5. L'absorbance de la solution inconnue est toujours de 0.778, en déduire la valeur de la masse de colorant dans le bonbon.

Pour estimer l'incertitude-type de cette mesure, on utilise les valeurs mesurées de 9 autres groupes d'élèves, regroupées dans le tableau ci-dessous.

Groupe	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m (en µg)	230	178	261	206	198	206	260	186	195

6. Estimer l'incertitude-type sur la masse de colorant dans le bonbon en suivant ce protocole pour une mesure unique.
7. Pour gagner en précision, on prend la moyenne des réalisations pour estimer la masse. Estimer la masse et son incertitude-type en suivant cette méthode.
8. Les deux valeurs trouvées sont-elles compatibles ?
9. Discuter les écarts d'incertitudes-types entre les expériences.

Corrigé :

1. Prenons la première valeur, Il vient $k = 8.60 \times 10^4\,\text{L/mol}$. Pour déterminer l'incertitude-type, calculons l'écart-type de l'ensemble des k. Il vient $u(k) = 0.77 \times 10^4\,\text{L/mol}$.
2. On a $c = A/k$ qui est calculée avec le k de la question précédente. L'incertitude-type de l'absorbance A étant négligeable, on estime l'incertitude-type relative
$$\frac{u(c)}{c} = \frac{u(k)}{k} \approx 8.9\% \;.$$
Il vient donc $c = 9.05 \times 10^{-6}\,\text{mol/L}$ et $u(c) = 0.81 \times 10^{-6}\,\text{mol/L}$.
3. Par définition, on a $m = McV$. Il vient donc $\boxed{m = 263\,\mu\text{g}}$ et $\boxed{u(m) = 23\,\mu\text{g}}$.
4. On réalise une régression linéaire entre c et A, par exemple avec une calculatrice réalisant des traitements statistiques ou sous python avec la commande `numpy.polyfit(A,c,1)` de la bibliothèque `numpy`, la pente étant le premier paramètre de la réponse de cette fonction (le second étant l'ordonnée à l'origine qui est très proche de 0 comme prévu). On trouve $k = 8.645\,028\,14 \times 10^4\,\text{L/mol}$. Il n'est pas possible d'estimer l'incertitude sur cette pente car nous n'avons pas de moyen d'estimer précisément l'incertitude-type sur chaque concentration. C'est de plus inutile car la variabilité totale de l'expérience (régression linéaire incluse) sera estimée via un traitement statistique à la fin de l'expérience.

5. On trouve, toujours sans incertitudes, $m = 262.516\,288\,\mu g$. On note que cette valeur est heureusement cohérente avec la valeur et l'incertitude-type trouvée dans l'expérience précédente.
6. On calcule l'écart-type de la distribution sur les 10 masses disponibles, et on trouve une incertitude-type sur une mesure unique. On trouve donc $u(m) = 31\,\mu g$.
7. On divise l'incertitude-type précédente par $\sqrt{10}$ et on prend la moyenne des masses trouvées, il vient donc la valeur $\boxed{m = 218\,\mu g}$ et $\boxed{u(m) = 10\,\mu g}$.
8. Ces valeurs sont mutuellement séparés de quelques incertitudes-type, on peut les considérer compatibles.
9. On constate que les incertitudes sur les mesures uniques (par régression linéaire ou par traitement statistique) sont différentes. En effet, ces deux expériences ne sont pas identiques. La première consiste à étudier la variabilité d'une mesure d'un groupe précis utilisant un spectromètre, tandis que la seconde étudie la variabilité d'une mesure réalisée par un groupe dans une classe utilisant un spectromètre quelconque parmi une collection. Il est donc naturel que la variabilité de la seconde mesure soit plus importante. Ensuite, la dernière mesure a une incertitude-type bien plus faible, car la prise de la moyenne réduit fortement la variabilité de l'expérience. Cette opération est évidemment impossible en étudiant uniquement la mesure d'un groupe.

2.4.2 Exercice - Mesure de la vitesse du son à l'aide d'ultrasons : méthode par aspect ondulatoire

Un émetteur d'ultrasons est alimenté par une source de tension continue de 15 V est réglé de façon à envoyer un signal continu (signal sinusoïdal permanent). Un récepteur ultrasonore transforme l'onde ultrasonore, à l'endroit où il est situé, en une tension électrique de même fréquence et d'amplitude proportionnelle à celle de l'onde. On utilise deux récepteurs seront donc connectés aux entrées d'un oscilloscope afin de visualiser les signaux.

L'émetteur et les récepteurs seront placés sur un banc acoustique gradué permettant de relever leur position.

Mesure de la longueur d'onde : Un des récepteurs est maintenu fixe et tandis que le second se déplace sur le rail. On observe le signal périodique du second récepteur se déplacer sur l'écran de l'oscilloscope. Lorsque les deux récepteurs sont côte à côte, on observe la superposition des signaux.

On peut montrer que les signaux coïncident lorsqu'ils sont décalés spatialement d'un multiplie entier de la longueur d'onde λ.

On déplace donc lentement le second récepteur en comptant le nombre de coïncidences des signaux. Lorsque 10 coïncidences sont passées, on constate que le second récepteur est à la position 8.4 cm tandis que le premier est toujours à la position 0 cm, donnée sans incertitude.

1. Estimer l'incertitude-type de la distance entre les détecteurs.
2. En déduire une valeur de la longueur d'onde λ, son incertitude-type et son incertitude-type relative.

Mesure de la période : On mesure sur l'oscilloscope la période d'un des signaux. On trouve $T = 24.4\,\mu s$. Le calibre choisi dans la base temporelle de l'oscilloscope permet une mesure précise à 0.01 µs près.

3. En déduire l'incertitude-type sur la période et son incertitude-type relative.

Mesure de la célérité :

4. Calculer la célérité du son en utilisant la relation $c = \lambda/T$ et estimer son incertitude-type.
5. Cette mesure est-elle compatible avec la valeur de référence 343 m/s vue en cours ?

Corrigé :

1. La règle graduée est précise au millimètre. Cela implique qu'une mesure annoncée à 8.4 cm est en fait supposée être comprise entre 8.35 cm et 8.55 cm. L'incertitude-type est alors par définition $0.5\,\mathrm{mm}/\sqrt{3} \approx 0.29\,\mathrm{mm}$. Ainsi, la mesure est, avec le bon nombre de chiffres significatifs 84.00 mm.
2. Par la mesure, on a $D = 10\lambda$. On en déduit donc $\lambda = D/10$. La variabilité de λ est donc 10 fois plus faible que celle de D, on a donc aussi $u(\lambda) = u(D)/10$. Ce résultat se retrouve par les formules du cours de type produit. Il vient donc $\boxed{\lambda = 8.400\,\mathrm{mm}}$ et $\boxed{u(\lambda) = 0.029\,\mathrm{mm}}$. Il est à noter que si on avait calculé une seule longueur d'onde, l'incertitude-type aurait été dix fois plus importante. Mesurer plusieurs répétition d'un phénomène périodique permet de diminuer significativement l'incertitude par rapport à la mesure directe d'une seule périodicité. L'incertitude-type relative est de 0.3 %.
3. L'incertitude-type est directement estimée à l'aide de la formule $\Delta/\sqrt{3}$, soit ici $u(T) = 0.057\,\mu s$. L'incertitude-type relative est alors de 0.04 %. Cette seconde incertitude-type est donc négligeable devant la première et ne sera pas considérée pour la question suivante (sinon il faut utiliser une formule de composition des incertitudes).
4. On en déduit la valeur de la célérité $\boxed{c = 344.3\,\mathrm{m/s}}$ puis, en conservant l'incertitude-type relative, il vient $\boxed{u(c) = 1.2\,\mathrm{m/s}}$.
5. La valeur mesurée est séparée de moins de deux fois l'incertitude expérimentale, les mesures sont compatibles.

2.4.3 Activité expérimentale - Mesure d'une distance focale

Pour une lentille de focale donnée, calculer f' pour chaque mesure de couple objet/image et réaliser une étude statistique de type B.

Pour une discussion plus détaillée sur cette expérience, on peut se reporter à la seconde partie de l'article de J. Browaeys et T. Beau « *La relation de conjugaison et la régression linéaire.* » parue dans le BUP 1033, disponible en libre accès sur la page internet :

https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03217002

3 Classe de terminale spécialité

3.1 Rappel du programme officiel

Les concepts de mesure et d'incertitude ont été introduits en classe de seconde. En complément du programme de la classe de première, celui de la classe terminale introduit la notion d'incertitude-type composée, ajoute une compétence numérique visant à illustrer une situation de mesure avec incertitudes composées et propose d'utiliser un critère quantitatif pour comparer, le cas échéant, le résultat de la mesure d'une grandeur à une valeur de référence.

L'objectif principal est d'exercer le discernement et l'esprit critique de l'élève sur les valeurs mesurées, calculées ou estimées.

Notions et contenus	**Capacités exigibles**
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique.	Exploiter une série de mesures indépendantes d'une grandeur physique : histogramme, moyenne et écart-type. Discuter de l'influence de l'instrument de mesure et du protocole. Évaluer qualitativement la dispersion d'une série de mesures indépendantes. **Capacité numérique :** Représenter l'histogramme associé à une série de mesures à l'aide d'un tableur.
Incertitude-type.	Définir qualitativement une incertitude-type. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B).
Incertitudes-types composées	Évaluer, à l'aide d'une formule fournie, l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs dont les incertitudes-types associées sont connues. **Capacité numérique :** Simuler, à l'aide d'un langage de programmation, un processus aléatoire illustrant la détermination de la valeur d'une grandeur avec incertitudes-types composées.
Écriture du résultat. Valeur de référence.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure. ~~Comparer qualitativement un résultat à une valeur de référence.~~ Comparer, le cas échéant, le résultat d'une mesure m_{mes} à une valeur de référence m_{ref} en utilisant le quotient $\dfrac{\lvert m_{\text{mes}} - m_{\text{ref}}\rvert}{u(m)}$ où $u(m)$ est l'incertitude-type associée au résultat.

En rouge les modifications par rapport au programme de première générale.

3.2 Éléments théoriques

3.2.1 Comparaison de deux mesures

Pour pouvoir comparer deux mesures entre elles, il faut un critère quantitatif pour indiquer si ces deux mesures sont considérées comme compatibles ou incompatibles.

Définition. L'**écart normalisé** E_N (ou z-score) entre deux processus de mesure donnant les valeurs m_1 et m_2 et d'incertitudes types $u(m_1)$ et $u(m_2)$ est défini par

$$E_N = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{u(m_1)^2 + u(m_2)^2}} . \tag{3.1}$$

Si on compare une mesure à une valeur de référence et que l'on peut négliger l'incertitude-type de la valeur de référence, on a

$$\boxed{E_N = \frac{|m_{\text{mes}} - m_{\text{ref}}|}{u(m_{\text{mes}})}} . \tag{3.2}$$

Par convention, on qualifie souvent deux résultats de **compatibles** si leur écart normalisé vérifie la propriété $\boxed{E_N \lesssim 2}$.

Cette définition a une interprétation directe par rapport à ce qu'ils sont appris dans les classes précédentes. En effet, on compare directement l'écart entre la mesure et la valeur attendue à l'incertitude-type. Ce critère quantitatif a le mérite de clarifier le processus de validation d'une mesure. Toutefois, il n'apporte rien de nouveau par rapport à ce que les élèves ont appris en seconde et première.

Ce seuil à 2 est d'origine historique. On le retrouve dans de nombreux champs scientifiques, comme la médecine, la pharmacie, la biologie, la psychologie, l'économie, l'écologie, etc. Ce seuil peut différer selon le domaine : par exemple pour démontrer l'existence d'une nouvelle particule en physique subatomique, il faut atteindre un seuil de 5.

Pour plus de détails, on peut se reporter aux éléments 27 à 30 de la ressource Eduscol.

3.2.2 Incertitude-type composées

On admet les deux relations ci-dessous, qui devront être fournies aux élèves pour qu'ils calculent les incertitudes composées dans les cas de somme ou de produit.

Propriété. Supposons que l'on calcule $y(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$. L'incertitude-type de y est alors donnée par

$$\boxed{u(y) = \sqrt{\left(\alpha u(x_1)\right)^2 + \left(\beta u(x_2)\right)^2}} . \tag{3.3}$$

> ***Remarque :*** *L'application de cette formule à N réalisations de la même expérience permet de retrouver directement la formule de l'incertitude-type de la moyenne.*

Propriété. Supposons que l'on calcule $y(x_1, x_2) = a x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$. L'incertitude-type relative de y est alors donnée par

$$\boxed{\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\alpha \frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\beta \frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}} . \tag{3.4}$$

Incertitudes-type composées quelconques Seules les deux formules précédentes sont relativement simples à manipuler. Pour tous les autres cas, il est nécessaire de revenir à la définition des incertitudes puis, à l'aide d'une simulation informatique de type Monte-Carlo, de calculer l'incertitude-type.

Supposons que l'on cherche à estimer une grandeur y donnée par $y = f(x_1, x_2, ...)$ avec les x_i des données résultants d'une mesure et f une fonction connue. Chaque x_i est caractérisé par sa valeur et son incertitude-type.

La valeur de y est donnée par l'application de la formule. Pour estimer l'incertitude-type, il faut remonter à la variabilité de y, qui est elle-même une conséquence de la variabilité des x_i.

Pour cela, il faut :

- Fixer un nombre N de simulations à réaliser ;
- Pour k entre 1 et N, réaliser
  - un tirage aléatoire pour chaque x_i ;
  - utiliser les valeurs de ce tirage et la fonction f pour calculer une valeur y_k ;
  - sauvegarder cette valeur y_k ;
- l'incertitude-type de y est l'écart-type de la distribution des y_k.

> ***Remarque :*** *La moyenne des y_k permet souvent de retrouver la valeur y, mais pas nécessairement. La différence entre ces deux valeurs conduit à de longs débats non tranchés entre statisticiens. À notre échelle, cette différence n'a aucune importance.*

Le choix de la distribution de probabilité de chaque x_i dépend de plusieurs facteurs expérimentaux. La modélisation de cette distribution peut être délicate. Par exemple, il n'est pas du tout naturel de prendre systématiquement une distribution gaussienne.

En règle général, les x_i sont mesurés avec une précision. En dessous de cette précision, l'étudiant est incapable d'accéder à une information sur la distribution de probabilité. On privilégie donc la **distribution uniforme de probabilité**, cohérente avec l'expérience pratique de l'étudiant.

> ***Remarque :*** *Il ne faut pas oublier qu'en notant Δ la précision, l'incertitude-type qui caractérise la variabilité vaut $u = \Delta/\sqrt{3}$.*

3.3 Propositions d'activités

Les exercices présentés ici peuvent être utilisés en tant que tel ou faire l'objet d'un traitement directement lors d'une séance de travaux pratiques.

3.3.1 Calculs d'incertitudes composées par simulation Monte-Carlo

À l'aide de python, on a simulé à l'aide d'une méthode Monte-Carlo les incertitudes composées de :

- une fréquence connaissant la période ;
- une longueur entre deux points connaissant leurs positions ;
- une célérité connaissant une fréquence et une longueur d'onde ;
- une célérité connaissant la période de l'onde et la position de deux nœuds séparant 10 longueurs d'ondes ;
- une distance focale connaissant les positions de l'objet et de l'image.

Tous ces exemples sont regroupés dans un Google Colab disponible en cliquant ici [2].

Ces simulations peuvent être réalisées avec des tableurs en utilisant les fonctions qui génèrent des nombres aléatoires de ceux-ci.

3.3.2 Exercice - Détermination de la valeur d'une capacité dans un circuit RC

Lors d'une séance de travaux pratiques, des élèves ont réalisé le circuit suivant de la charge d'un condensateur. À

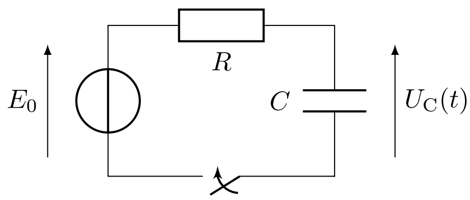


Fig. 4 – Schéma électrique de la charge du condensateur.

l'aide d'un logiciel, ils ont réalisé un ajustement exponentiel de la tension $U_\mathrm{C}(t)$ dans le but de mesurer la constante de temps τ. Une étiquette sur le condensateur utilisé indique 1.00 µF. Le tableau ci-dessous regroupe leurs données pour différentes valeurs de la résistance R.

R (en Ω)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
τ (en ms)	151	240	356	458	547	651	741	843	949	1041

Tab. 2 – Mesures de la constante de temps τ pour différentes résistances.

On rappelle que théoriquement, la constante de temps est définie par $\tau = RC$ avec R la résistance totale du circuit.

1. Calculer $C = \tau/R$ pour toutes les données. En déduire une valeur moyenne de C ainsi que son incertitude-type.
2. Conclure sur la compatibilité entre la mesure et la valeur affichée sur le condensateur.

Corrigé :

1. On trouve $C = 1.143\,\mu\mathrm{F}$ et $u(C) = 0.045\,\mu\mathrm{F}$ où l'incertitude-type est l'écart-type de la distribution divisé par $\sqrt{10}$.
2. La valeur affichée n'ayant pas d'incertitudes, on calcule le nombre d'écart-type séparant la valeur affichée et la valeur mesurée à l'aide de l'écart normalisé. On trouve $\dfrac{|C_a - C_m|}{u(C_m)} \approx 3.20$. Les deux valeurs sont incompatibles.

2. https://bit.ly/3s8RHqa

Ainsi, soit la valeur affichée est fausse, ce qui est rarement le cas à ce point, soit la modélisation physique pose problème.
En effet, il est nécessaire de prendre en compte l'existence d'une résistance interne de $50\,\Omega$ au générateur, de la forme $\tau = (R + R_{\text{int}})C$. Pour la considérer, il y a plusieurs possibilités :
- ▷ prendre des résistances plus grandes pour que le résistance interne soit négligeable ;
- ▷ calculer $C = \tau/(R + R_{\text{int}})$ en fournissant la valeur de la résistance interne (elle est écrite sur les générateurs) ;
- ▷ faire une régression linéaire... mais qui est hors programme au lycée !

3.3.3 Exercice - Précision de dosages acide-base

On souhaite comparer les dosages acide-base par colorimétrie et par suivi pH-métrique. Dans les deux cas, l'équation support de la réaction de dosage est la suivante :

$$\mathrm{HO^- + H_3O^+ \longrightarrow 2H_2O} \ .$$

Une solution de $V_1 = 100\,\text{mL}$ contenant les ions $\mathrm{HO^-}$ à la concentration $c_1 = 10^{-2}\,\text{mol/L}$ est dosée par une solution de chlorure d'hydrogène contenant les ions $\mathrm{H_3O^+}$ à la concentration $c_2 = 10^{-1}\,\text{mol/L}$.

1. Donner la valeur du volume d'équivalence théorique attendu.
2. Par une autre expérience, on a évalué une incertitude-type relative sur le volume V_0 de 0.3% et sur les concentrations préparées de 1%. En déduire l'incertitude-type du volume attendu dans les conditions de préparation de l'expérience.

Dix élèves réalisent chacun un dosage par suivi colorimétrique et un dosage par suivi pH-métrique. Leurs données expérimentales sont regroupées dans le tableau ci-dessous.

Groupe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V_{eq} colorimétrique (en mL)	9,6	10,3	10,2	10,5	11,0	9,2	10,3	9,9	9,2	9,6
V_{eq} pH-métrique (en mL)	10,1	10,0	9,7	9,7	9,7	10,0	10,2	9,9	9,8	10,3

3. Quel dosage a la plus faible incertitude-type ?
4. En utilisant les données de chaque type de dosage, quels sont les deux résultats finaux de chaque dosage ?
5. Ces résultats sont-ils compatibles avec la valeur théorique ?

Corrigé :

1. L'équivalence a lieu lorsque les réactifs sont introduits en proportion stœchiométriques, soit $V_1 c_1 = V_{\text{eq, théo}} c_2$ d'où $V_{\text{eq,théo}} = V_1 c_1 / c_2 = 10\,\text{mL}$.
2. On applique la formule des incertitudes-composées de type produit, soit

$$\frac{u(V_{\text{eq, théo}})}{V_{\text{eq, théo}}} = \sqrt{\left(\frac{u(V_1)}{V_1}\right)^2 + \left(\frac{u(c_1)}{c_1}\right)^2 + \left(\frac{u(c_2)}{c_2}\right)^2} = \sqrt{0.003^2 + 2 \times 0.01^2} = 1.4\%$$

soit $\boxed{V_{\text{eq, théo}} = 10.00\,\text{mL}}$ et $\boxed{u(V_{\text{eq, théo})} = 0.14\,\text{mL}}$.

3. On calcule l'écart-type des deux distributions pour estimer les incertitudes-type. Pour le dosage colorimétrique, on trouve $u(V_{\text{eq, col}}) = 0.58\,\text{mL}$. Pour le dosage pH-métrique, on trouve $u(V_{\text{eq, pH}}) = 0.22\,\text{mL}$. Le dosage pH-métrique a donc une variabilité plus faible.
4. Pour avoir la valeur finale, on prend la moyenne et on trouve l'incertitude-type de la moyenne en divisant l'incertitude-type sur une mesure par $\sqrt{10}$.
Il vient pour le dosage colorimétrique $\boxed{V_{\text{eq, col}} = 9.98\,\text{mL}}$ et $\boxed{u(V_{\text{eq, col}}) = 0.18\,\text{mL}}$ et pour le dosage pH-métrique $\boxed{V_{\text{eq, pH}} = 9.94\,\text{mL}}$ et $\boxed{u(V_{\text{eq, pH}}) = 0.07\,\text{mL}}$.
5. Pour comparer avec la valeur attendue, on calcule l'écart normalisé, on trouve $E_{N,\text{ col}} = 0.09$ et $E_{N,\text{ pH}} = 0.38$. Dans les deux cas, ce nombre est inférieur à 2. Les dosages sont compatibles avec la valeur attendue. Il est à noter qu'au lycée, la valeur de référence est à prendre sans incertitude. Ici, étant donné sa valeur comparativement à la valeur de l'incertitude-type expérimentale, nous ne l'avons pas négligé. Au lycée, on pourra se contenter d'un argument qualitatif du type « les valeurs possibles se superposent ».