

Mesures et incertitudes

Formation dans le cadre du programme de Physique-Chimie de CPGE 2021

Maxime Champion - Version du 14 décembre 2021

Table des matières

1 Variabilité et incertitude-type	2
1.1 La variabilité en science expérimentale.	2
1.2 L'incertitude-type.	2
1.3 Interprétation de l'incertitude-type.	3
1.4 Comparaison de deux mesures	3
2 Estimation du résultat d'une mesure et de l'incertitude-type	4
2.1 Expériences sans variabilité observée (incertitudes de type B)	4
2.2 Expériences avec variabilité observée (incertitudes de type A)	6
2.3 Schématisation du choix de la méthode d'estimation de l'incertitude	6
3 Les incertitudes-type composées	6
3.1 Incertitude-type composées de type somme	6
3.2 Incertitudes-type composées de type produit	7
3.3 Incertitudes-type composées quelconques	7
4 La régression linéaire	7
4.1 Principe	7
4.2 Quand utiliser une régression linéaire?	7
4.3 Application par méthode Monte-Carlo.	8
5 Annexe 1 : Méthode Monte-Carlo pour estimer des incertitudes-types	8
5.1 Incertitude-type composée.	8
5.2 Régression linéaire	9
6 Annexe 2 : Exercices corrigés	10
6.1 Précision de la verrerie en chimie.	10
6.2 Précision de dosages acide-base.	10
6.3 Mesure d'absorbance pour déterminer une concentration inconnue	10
6.4 Mesures de la vitesse du son à l'aide d'ultrasons	11
6.5 Détermination de la valeur d'une capacité.	12
6.6 Calorimétrie avec pertes thermiques	13
6.7 Corrigés	14

Conformément au programme de CPGE, dans la poursuite de ceux du lycée, les notions présentées se veulent conformes aux règles internationales, définies par le *Bureau International des Poids et Mesure* dans le document fondamental *Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure* (souvent cité en tant que « GUM »).

La lecture de celui-ci est conseillée, d'autant que ce document de référence est en français. Il est disponible librement sur le site :

<https://www.bipm.org/en/committees/jc/jcgm/publications>

Ce document est issu de ma pratique d'enseignement en classe de PTSI depuis la rentrée scolaire 2020. Ce document est construit autour des informations fournies à mes étudiants pendant les séances de Travaux Pratiques. La maîtrise des notions présentées est donc un objectif de mon enseignement. À part quelques remarques, ce document ne contient pas d'informations hors programme ou hors de portée des étudiants.

Je tiens à remercier pour Adrien Licari, Jean-Baptiste Flament, Jérémy Ferrand et Pierre Jamonneau pour leurs premières discussions et relectures ainsi que la fraction de la liste UPS ayant fourni relectures et remarques constructive. Et bien évidemment, je remercie Julien Browaays et Nicolas Décamp pour avoir initié cette petite révolution dans nos enseignements expérimentaux, puis pour avoir assumé les longs échanges conduisant à ce document !

Remarque préliminaire

L'évaluation des incertitudes de mesure est toujours un point délicat du travail expérimental. Toutefois, cette difficulté est réelle et intrinsèque à toute mesure, quel que soit le niveau de l'expérience. L'objectif de ce document est de fournir un cadre unique à nos étudiants pour toutes les expériences rencontrées au niveau enseignement en CPGE.

« *Bien que ce Guide fournisse un cadre pour l'estimation de l'incertitude, il ne peut remplacer ni la réflexion critique ni l'honnêteté intellectuelle ni la compétence professionnelle. L'évaluation de l'incertitude n'est jamais une tâche de routine ni une opération purement mathématique ; elle dépend de la connaissance détaillée de la nature du mesurande et du mesurage. La qualité et l'utilité de l'incertitude fournie pour le résultat d'un mesurage dépendent, en fin de compte, de la compréhension, de l'analyse critique et de l'intégrité de [celles et] ceux qui contribuent à son évaluation.* »

GUM 2008 (dernière version) - 3.4.8

1 Variabilité et incertitude-type

1.1 La variabilité en science expérimentale

Une expérience de mesure en science expérimentale est un processus généralement complexe qui entremêle de très nombreux processus. Cette complexité se traduit systématiquement par une variabilité de la mesure, qui implique que la répétition de l'ensemble de la mesure conduit généralement à une valeur mesurée sensiblement différente de la première. Cette variabilité est naturelle et fait intrinsèquement partie de la mesure. Il ne faut pas chercher à la faire disparaître, bien au contraire, elle renferme généralement une grande richesse d'information sur le processus physique !

Cette variabilité peut provenir de nombreux aspects, dont les principaux sont les suivants :

- ▷ le choix de la méthode de mesure ;
 - | *Exemple 1* : Choisir de mesurer un petit élément à la règle graduée ou au pied à coulisse n'implique pas la même précision !
- ▷ les variations de l'environnement ;
 - | *Exemple 2* : Si l'on souhaite mesurer la célérité du son avec un protocole se déroulant sur une journée complète, comme la température de l'air va évoluer au cours du temps, la célérité du son aussi.
- ▷ les instruments de mesure ;
 - | *Exemple 3* : Mesurer une tension avec deux voltmètres semblant identiques amène parfois à une mesure de tension légèrement différente.
- ▷ le processus physique lui-même ;
 - | *Exemple 4* : Par exemple, une expérience de mécanique quantique est intrinsèquement variable car la mécanique quantique ne prédit que des lois de probabilité.
- ▷ et surtout, la personne réalisant l'expérience.

Généralement au niveau scolaire, la personne réalisant l'expérience est la principale cause de variabilité de la mesure. Par ses gestes, ses choix et sa technique, cette personne introduit une variabilité importante. Il est donc totalement naturel que deux personnes réalisant la même expérience, dans les mêmes conditions, avec le même matériel, trouvent des valeurs différentes.

Il est à noter que le but de toute formation expérimentale, de la maternelle jusqu'au plus haut niveau universitaire et professionnel, est de patiemment faire diminuer cette variabilité. En acquérant chaque année des nouvelles connaissances et de nouvelles compétences, un-e étudiant-e peut donc patiemment réussir à faire diminuer son impact personnel sur la variabilité d'une mesure.

1.2 L'incertitude-type

Définition. La quantification de la variabilité d'une mesure x d'une grandeur est appelée **incertitude-type** et notée $u(x)$.

Par définition, l'incertitude-type correspond à l'**écart-type** de la distribution des données issues d'une répétition de la mesure.

Dans ce document, le résultat d'une mesure sera noté **par convention** $x \pm u(x)$.

🚫🚫🚫 **Attention !** Ce qui suit le \pm est une **incertitude-type**. Il ne s'agit pas d'une « incertitude élargie ». Cette notation synthétique peut prêter à confusion. Pour éviter cela, on peut spécifier les deux informations de façon séparée, à savoir $x = \dots$ d'une part et $u(x) = \dots$ d'autre part.

On fera à ce stade deux remarques :

- ▷ pour estimer l'incertitude-type du résultat d'une **unique** mesure, il faut donc répéter un grand nombre de fois le processus de mesure. Cette répétition et les valeurs supplémentaires servent uniquement à estimer la variabilité du processus de mesure.
- ▷ l'incertitude-type est l'estimation d'une variabilité qui est unique à chaque processus de mesure. Il est donc naturel que deux personnes réalisant exactement la même expérience aient une variabilité, et donc une incertitude-type, différente.

Propriété. La variabilité d'un processus de mesure avec un protocole, du matériel et des conditions expérimentales données, impliquant une ou plusieurs personnes dans l'expérience, est mesurée par une unique incertitude-type.

Incertitude-type « relative » : On peut définir de plus l'incertitude-type de mesure « relative » la grandeur $u(x)/x$, que l'on donne généralement en pourcentage.

1.3 Interprétation de l'incertitude-type

Revenons à la définition de l'incertitude-type. Soit un ensemble de N mesures notées x_i avec i allant de 1 à N .

On définit la **moyenne** \bar{x} de l'ensemble, qui nous permet de définir l'écart-type, et donc l'incertitude-type, grâce aux relations

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad \text{et} \quad u(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}.$$

Il est à noter qu'il n'y a qu'une incertitude-type $u(x)$ pour l'ensemble des mesures x_i , et non pas une pour chacune. En effet, l'incertitude-type caractérise la variabilité d'un processus de mesure, et donc toutes les mesures issues de ce processus ont logiquement la même incertitude-type.

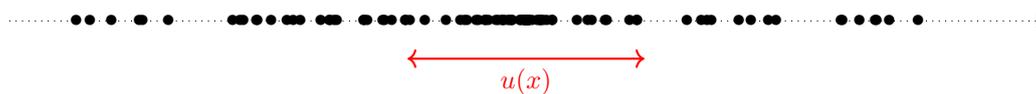


Fig. 1 – Représentation d'une série de 100 mesures d'une grandeur x ainsi que de la largeur de l'incertitude-type de cet ensemble.

La figure 1 représente une distribution de mesures ainsi que l'incertitude-type. On constate qu'en moyenne deux valeurs prises au hasard sont séparées de quelques $u(x)$. Toutefois, on constate aussi que quelques points sont très éloignés des autres. Il ne s'agit pas de points aberrants, mais de valeurs dans des domaines peu fréquents car peu probables mais tout de même possibles.

Propriété. L'incertitude-type permet de quantifier la variabilité d'une mesure. Ainsi, deux mesures x_1 et x_2 issues du même processus sont séparées en moyenne de quelques $u(x)$ par construction de l'incertitude-type en tant qu'écart-type.

1.4 Comparaison de deux mesures

1.4.1 Définition de l'écart normalisé

Pour pouvoir comparer deux mesures entre elles, il faut un critère quantitatif pour indiquer si ces deux mesures sont considérées comme compatibles ou incompatibles.

Définition. L'écart normalisé E_N entre deux processus de mesure donnant les valeurs m_1 et m_2 et d'incertitudes types $u(m_1)$ et $u(m_2)$ est défini par

$$E_N = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{u(m_1)^2 + u(m_2)^2}}. \quad (1.1)$$

Par convention, on qualifie souvent deux résultats de **compatibles** si leur écart normalisé vérifie la propriété

$E_N \lesssim 2.$

| **Remarque :** L'écart normalisé s'appelle aussi parfois « z-score ».

Ce seuil à 2 est d'origine historique. On le retrouve dans de nombreux champs scientifiques, comme la médecine, la pharmacie, la biologie, la psychologie, l'économie, l'écologie, etc. Ce seuil peut différer selon le domaine : par exemple pour démontrer l'existence d'une nouvelle particule en physique subatomique, il faut atteindre un seuil de 5.

On constate avec les trois histogrammes 2a, 2b et 2c que les distributions se chevauchent si E_N est suffisamment petit. Si elles se chevauchent, cela veut dire qu'il est possible que les deux processus de mesure conduisent au même résultat.

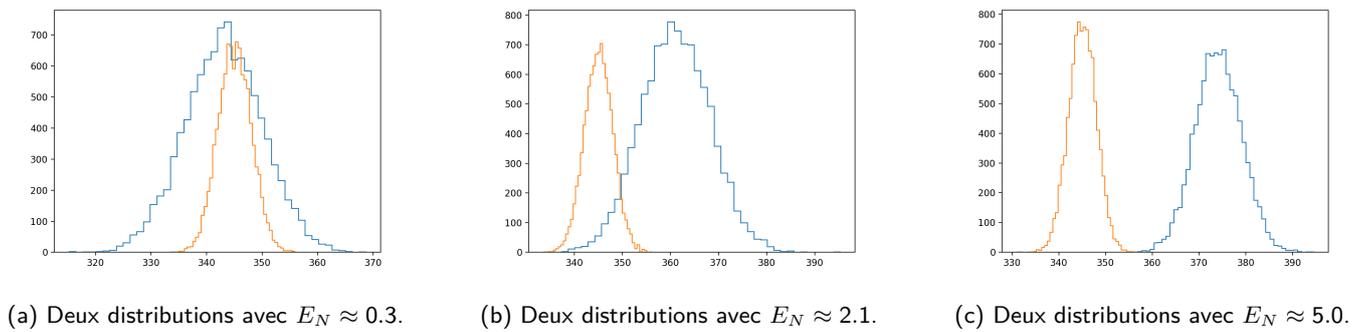


Fig. 2 – Tracé de deux distributions de résultats de mesures.

1.4.2 Interprétation

Pour justifier cette convention, on peut revenir à la définition de l'incertitude-type. Celle-ci quantifie les fluctuations potentielles de la valeur mesurée annoncée. Lorsque deux mesures sont cohérentes, on s'attend à ce qu'elles ne coïncident pas exactement, mais qu'elles ne s'écartent pas l'une de l'autre de plus que de quelques incertitudes-type.

Pour respecter cette définition, prenons deux valeurs expérimentales que l'on souhaite comparer m_1 et m_2 , d'incertitudes-type $u(m_1)$ et $u(m_2)$. Si m_1 et m_2 peuvent être considérées comme compatibles, cela implique que la valeur 0 n'est éloignée de $m_1 - m_2$ que de quelques $u(m_1 - m_2)$.

On admet pour l'instant que $u(m_1 - m_2) = \sqrt{u(m_1)^2 + u(m_2)^2}$ (ce résultat est discuté dans la partie 3.1).

Ainsi, E_N compare $m_1 - m_2 - 0$ et $u(m_1 - m_2)$. Autrement dit, ce rapport donne le nombre d'incertitudes-type séparant 0 de $m_1 - m_2$. Si ce nombre est trop grand, 0 n'est pas compatible avec $m_1 - m_2$ et donc m_1 et m_2 ne sont pas compatibles.

Dans les trois figures 3a, 3b et 3c, la barre verticale représente la valeur 0. On constate bien que, si E_N est trop grand, alors cela implique que la valeur 0 est séparée de tous les points de mesure d'un trop grand nombre de fois l'incertitude-type.

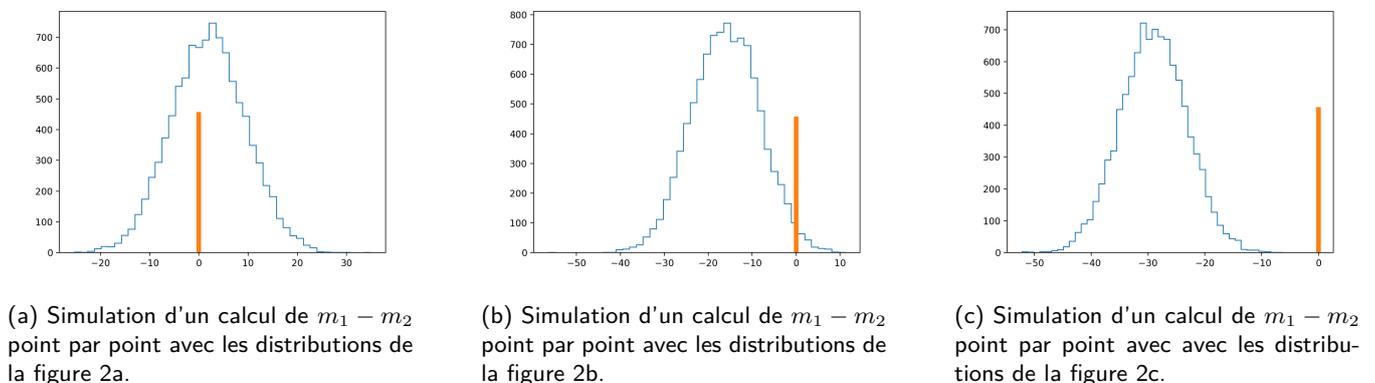


Fig. 3 – Simulation d'un calcul de $m_1 - m_2$ point par point.

2 Estimation du résultat d'une mesure et de l'incertitude-type

2.1 Expériences sans variabilité observée (incertitudes de type B)

Certaines expériences n'ont pas de variabilité observée. Cela signifie qu'en reproduisant la mesure, on retrouve systématiquement le même résultat. C'est par exemple le cas lorsque l'on mesure naïvement la taille d'un objet avec la même règle graduée. Logiquement, reproduire la mesure n'apporte pas d'information.

Cette absence de variabilité observée n'implique pas une absence de variabilité. Cela signifie juste qu'à l'échelle de cette expérience, avec l'appareil de mesure choisi, la variabilité est plus faible que la précision de la mesure.

Ce phénomène n'est pas uniquement lié à l'appareil de mesure. En effet, selon les conditions expérimentales, il n'est parfois pas matériellement possible (ou souhaité) de reproduire le processus de mesure. Dans ce cas, une seule valeur est accessible et il faut tout de même estimer son incertitude-type.

Il faut donc estimer théoriquement la variabilité de la mesure sans l'observer. Nécessairement, cela est possible sous certaines hypothèses qui ne seront pas forcément adaptées à toutes les expériences.

Propriété. Lors d'une mesure sans variabilité observée, on estime la plus petite plage dans laquelle l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée. On note \bar{x} la valeur centrale de cette plage et Δ sa demi-largeur. Autrement dit, l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée dans l'intervalle $[\bar{x} - \Delta, \bar{x} + \Delta]$.

Dans ce cas, le résultat de la mesure est $\boxed{\bar{x} \pm u(\bar{x})}$ avec $\boxed{u(\bar{x}) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}}$.

Comme toute incertitude-type, elle représente l'écart-type de la distribution uniforme des données comprises dans l'intervalle $[\bar{x} - \Delta, \bar{x} + \Delta]$.

Insistons sur deux remarques :

- ▷ L'intervalle Δ doit être pris le plus faible possible selon les critères personnels de l'expérimentateur et selon les conditions de l'expérience. Il ne doit pas y avoir de règle générale. Par exemple avec une règle graduée au millimètre, si la valeur tombe directement sur une graduation, il est naturel de prendre $\Delta = 0.25$ mm, tandis que si la valeur est entre deux graduations, on prendra plus logiquement $\Delta = 0.5$ mm. Et enfin, un étudiant peu sûr de lui peut choisir de prendre dans le même cas $\Delta = 1$ mm.
- ▷ Pour les appareils de mesure numérique, il est nécessaire de consulter la notice de l'appareil. Toutefois, bien souvent, les notices ne précisent pas clairement la nature de la valeur de la précision fournie (est-ce une incertitude-type ? un intervalle ? un écart-type d'une distribution gaussienne ?). Dans ce cas, on suppose que l'incertitude affichée sur la notice est un intervalle Δ de certitude de trouver la mesure.

Comment concilier l'évaluation de type B de l'incertitude-type et le traitement statistique ?

L'évaluation de l'incertitude-type d'une mesure en prenant l'écart-type de la distribution correspond à une évaluation expérimentale de l'incertitude-type. Ainsi, on reproduit la mesure, on constate la variabilité et on la mesure grâce à sa définition. Toutefois, pour que cette mesure soit correcte, il faut que l'écart-type d'un nombre limité de points donne une bonne estimation de l'incertitude, ce qui n'est jamais certain.

Remarque : Il faut aussi que les mesures soient totalement indépendantes. Ainsi, un résultat précédent ne doit pas biaiser une mesure suivante en cherchant un résultat « dans une zone connue ».

L'évaluation de type B correspond à une évaluation majoritairement théorique de la même incertitude-type. En effet, à l'aide d'informations partielles sur le protocole de mesure, on cherche à estimer la variabilité de la mesure. Il s'agit donc d'un processus délicat nécessitant un travail de modélisation. Ce travail est souvent plus complexe à réaliser que l'expérience car toutes les causes de variabilités doivent être anticipées et réfléchies.

Ces deux évaluations correspondent donc à deux façons différentes d'estimer l'incertitude. Ces deux estimations doivent être compatibles, à condition que l'estimation expérimentale soit correctement réalisée et que la modélisation théorique décrive correctement la réalité.

On observe en pratique plusieurs situations :

- ▷ **Si l'incertitude statistique est du même ordre de grandeur que l'incertitude de type B :** le traitement théorique de l'incertitude a intégré toutes les variabilités de l'expérience, et cela implique que l'on sait précisément pourquoi la mesure est variable car les causes d'incertitudes sont contrôlées.
- ▷ **Si l'incertitude statistique est plus grande que l'incertitude de type B :** le traitement théorique de l'incertitude n'a pas intégré toutes les causes de variabilités de l'expérience, certaines ont pu être oubliées. L'incertitude expérimentale est donc une bonne estimation globale de la variabilité de l'expérience.
- ▷ **Si l'incertitude statistique est plus petite que l'incertitude de type B :** le traitement théorique de l'incertitude a surestimé la variabilité de la mesure. En effet, si l'estimation théorique est correcte, cette variabilité doit apparaître en reproduisant la mesure.

Exemple 5 : Prenons une expérience de mesure de distance focale d'une lentille mince convergente. Un étudiant réalise vingt mesures de positions d'objet et d'image puis, en appliquant la relation de conjugaison, il en déduit vingt valeurs de la distance focale. En réalisant un traitement statistique, il mesure l'écart-type de la distribution de ces distances focales $u(f') = 0.15$ cm.

Ensuite, cet étudiant consciencieux estime la précision de la mesure de la position de l'objet à 1 cm et la précision de la position de l'image à 3 cm car il lui semble que l'image reste nette sur une plage assez large. À l'aide d'une simulation Monte-Carlo, il en déduit que l'incertitude de type B vaut $u(f') = 0.32$ cm.

Ainsi, en estimant la précision sur les positions, l'étudiant estime une variabilité qui est le double de la variabilité observée. L'étudiant estime donc une variabilité qui n'est pas observée. Les incertitudes sur les mesures des positions sont donc sur-estimées.

Qui plus est, en conduisant le calcul d'incertitude de type A décrite au paragraphe suivant, l'incertitude finale sur la moyenne est donnée par $u(\bar{f}') = u(f')/\sqrt{20} = 0.033$ cm. Le calcul d'incertitude de type B a donc donné une incertitude largement surestimée et son estimation a pris un temps certain à l'étudiant.

Ainsi, l'estimation de type B de l'incertitude-type permet de vérifier si on maîtrise bien toutes les causes de variabilités de l'expérience. Toutefois, si on a accès à l'incertitude statistique, l'estimation de l'incertitude de type B au niveau CPGE prend un temps certain et est souvent surestimée. Ainsi, lorsque cela est possible, on pourra se satisfaire de l'incertitude statistique.

Remarque : À un niveau universitaire de traitement des incertitudes, on choisit généralement de faire une moyenne pondérée. Les points de mesures de forte incertitude-type individuelle ont alors un poids moins fort dans l'estimation de la moyenne. Ainsi, même si elle n'est pas nécessaire à notre niveau, l'estimation des incertitude-types sur chaque point de mesure permet une meilleure estimation de la valeur finale.

2.2 Expériences avec variabilité observée (incertitudes de type A)

Lorsque la variabilité des mesures est accessible, il convient de répéter un grand nombre de fois le processus mesure pour estimer l'incertitude-type sur une unique réalisation de la mesure.

Toutefois, comme nous l'avons vu au paragraphe 1.3, certains points de mesure ont statistiquement une chance d'être très éloignés des autres.

Pour gagner en précision, nous pouvons utiliser les différents points de mesures effectués pour aller plus loin qu'une simple estimation de l'incertitude-type sur une mesure unique.

Nous **changeons donc d'expérience**, l'expérience n'est plus « mesurer un point à l'aide d'un protocole » mais « mesurer la moyenne de N points effectués avec le même protocole ». Cette expérience est différente et a donc une incertitude-type différente. L'intérêt de la moyenne est qu'elle va réduire les variabilités.

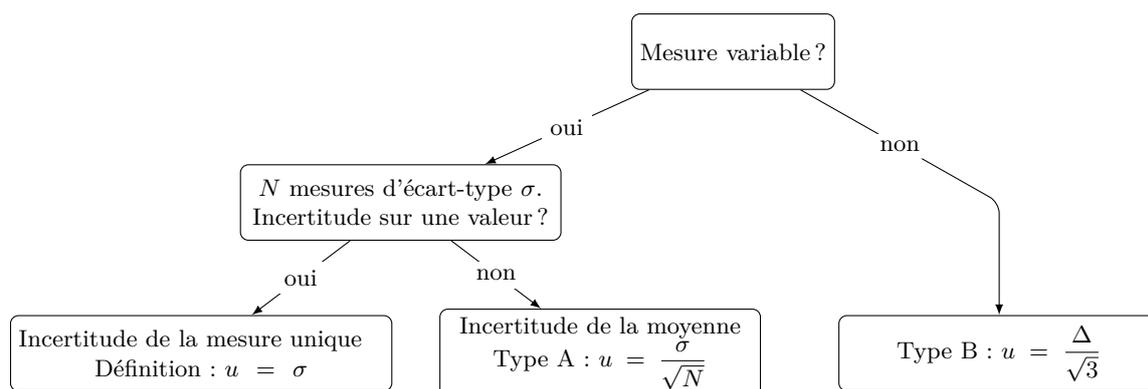
Pour estimer l'incertitude-type de cette moyenne, il faut par définition reproduire un grand nombre de fois l'expérience et calculer l'écart-type de la distribution obtenue. Or chaque expérience est déjà la reproduction de la mesure unique un grand nombre de fois, on comprend bien que cette opération peut vite être chronophage. Heureusement, il existe une formule mathématique permettant d'estimer cet écart-type.

Propriété. On réalise N fois le même protocole pour obtenir l'ensemble des points expérimentaux $\{x_i\}$. On note l'incertitude-type $u(x)$ de cet ensemble de mesures qui est évaluée en calculant son écart-type.

Le résultat de l'expérience est $\bar{x} \pm u(\bar{x})$ avec $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ la moyenne de la distribution et avec $u(\bar{x}) = \frac{u(x)}{\sqrt{N}}$.

Ainsi, en une série de mesure, on obtient les points expérimentaux, leur incertitude-type, la moyenne de ces points et grâce à cette formule, l'incertitude-type sur la moyenne. On obtient ainsi une estimation plus précise de la grandeur à mesurer en modérant la variabilité de chaque prise de mesure unique.

2.3 Schématisation du choix de la méthode d'estimation de l'incertitude



3 Les incertitudes-type composées

Très souvent, la mesure expérimentale n'est pas le résultat recherché de l'expérience. Il faut souvent combiner des mesures entre elles pour obtenir le résultat souhaité.

3.1 Incertitude-type composées de type somme

Propriété. Supposons que l'on calcule $y(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$. L'incertitude-type de y est alors donnée par

$$u(y) = \sqrt{(\alpha u(x_1))^2 + (\beta u(x_2))^2}. \quad (3.1)$$

3.2 Incertitudes-type composées de type produit

Propriété. Supposons que l'on calcule $y(x_1, x_2) = ax_1^\alpha x_2^\beta$. L'incertitude-type relative de y est alors donnée par

$$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\alpha \frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\beta \frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}. \quad (3.2)$$

3.3 Incertitudes-type composées quelconques

Seules les deux formules précédentes sont à connaître, pour tous les autres cas, nous allons revenir à la définition des incertitudes puis, à l'aide d'une simulation informatique comportant une part d'aléatoire, calculer l'incertitude-type.

Définition. Un algorithme utilisant la variabilité d'une mesure pour simuler un calcul d'incertitude fait parti des **algorithmes de type Monte-Carlo**.

Remarque : Les algorithmes de Monte-Carlo sont nombreux et ont de nombreuses applications. Leur point commun est qu'ils sont basés sur un processus aléatoire simulé informatiquement.

4 La régression linéaire

4.1 Principe

Définition. Prenons des listes de mesures x et y avec leurs incertitudes. La **régression linéaire** est une opération mathématique qui consiste à trouver les meilleurs coefficients a et b tels que $ax_i + b$ soient les plus proches en moyenne des points de mesures y_i .

Remarque : En toute rigueur, il faudrait parler de régression affine et non pas linéaire.

Une régression linéaire permet de trouver la « meilleure droite » modélisant le mieux le comportement de ces points. Mathématiquement, on peut optimiser par un calcul dit « des moindres carrés » ce procédé.

Attention ! Le coefficient r^2 n'a aucun intérêt pour valider un modèle physique ou pour estimer des incertitudes-type. Pour vous convaincre que le coefficient r^2 ne permet en rien de juger une régression linéaire, on peut regarder la vidéo suivante (dans laquelle le coefficient « cor » correspond au r) :

https://youtu.be/It4UA75z_KQ

4.2 Quand utiliser une régression linéaire ?

Supposons que l'on cherche à vérifier un modèle $y = ax + b$ et que l'on ait, après expérience, un ensemble de valeurs expérimentales $\{x_i\}$ et $\{y_i\}$ qui possèdent chacun une certaine variabilité.

La régression linéaire simple permet, à partir de l'ensemble des points expérimentaux, de trouver une valeur de a et une valeur de b . Pour estimer l'incertitude-type de ces paramètres, il faut réaliser des ensembles de nouvelles mesures $\{x_i, y_i\}$ puis réaliser une nouvelle régression linéaire. En réalisant un grand nombre de fois cette opération, on obtiendra, en prenant les écarts-types, les valeurs des incertitudes-types sur les paramètres. Bien souvent, un tel procédé est bien trop long et donc peu pratique.

Il faut donc mieux, lorsque c'est possible, éviter le traitement des incertitudes par régression linéaire.

- ▷ Lors d'une expérience identique réalisée par plusieurs expérimentateurs conduisant à une régression linéaire par chacun des expérimentateurs, l'incertitude-type finale est uniquement évaluée par l'étude de la variabilité des résultats de la régression linéaire. Il n'est pas nécessaire d'étudier plus en détail la régression linéaire. Dans ce cas, la régression linéaire est une des étapes du protocole de mesure, et sa variabilité est intégrée lors du calcul de variabilité final.
- ▷ Si le modèle recherché implique $b = 0$, dans ce cas, on cherche uniquement à estimer a . On peut donc calculer un grand nombre de valeur de a par la relation y_i/x_i puis réaliser un traitement statistique sur ces valeurs. Le grand intérêt est que, dans ce cas, les N points de mesures conduisent à N valeurs de a ayant une variabilité claire. Dans le cas de la régression linéaire, ces N valeurs conduisent à une unique valeur de a dont on ne peut pas directement étudier la variabilité.

Dans tous les autres cas, on peut estimer la variabilité de a et b par une simulation Monte-Carlo.

Remarque : Dans ce second cas, si le calcul de l'écart normalisé final entre la mesure de a et la valeur attendue a a une valeur plus grande que 2, c'est que le modèle linéaire n'est peut être pas optimal et qu'un modèle avec un b non nul serait préférable.

4.3 Application par méthode Monte-Carlo

On commence par réaliser une régression linéaire sans incertitudes sur les valeurs mesurées. La pente et l'ordonnée à l'origine obtenues sont le résultat numérique de la mesure.

Pour estimer leurs incertitudes-type, il faut de plus estimer **pour chaque point de mesure** la valeur de son incertitude-type. Ensuite, à l'aide d'une simulation Monte-Carlo, on utilise cette variabilité individuelle pour générer un grand nombre de distributions de points. Pour chacune de ces distributions, on réalise une régression linéaire ce qui conduira au final à un grand nombre de valeurs de a et de b . Il suffit ensuite de réaliser une étude statistique de ces données pour en déduire leur incertitude-type.

Pour s'assurer qu'une régression linéaire est correcte, on tracera **systématiquement** sur un graphique les données mesurées ainsi que la droite de la régression linéaire. Le modèle sera validé si, à l'œil, les points de mesure sont bien alignés et que la droite passe le plus proche de tous les points possibles, en incluant leurs incertitudes-type.

Remarque : On rappelle que l'incertitude-type est une estimation de la variabilité de la mesure. Ainsi, il est naturel que les points expérimentaux soient éloignés de la valeur de la modélisation de quelques incertitudes-type.

Si l'on constate par exemple que les points ressemblent plus à une parabole qu'à une droite, la régression linéaire ne sera pas l'outil approprié.

5 Annexe 1 : Méthode Monte-Carlo pour estimer des incertitudes-types

Les codes présentés dans cette partie sont réalisés sous python. Ce n'est absolument pas une obligation, les simulations peuvent être réalisées avec n'importe quel tableur pouvant réaliser un tirage de nombres aléatoires.

5.1 Incertitude-type composée

5.1.1 Principe

Supposons que l'on cherche à estimer une grandeur y donnée par $y = f(x_1, x_2, \dots)$ avec les x_i des données résultants d'une mesure et f une fonction connue. Chaque x_i est caractérisé par sa valeur et son incertitude-type.

La valeur de y est donnée par l'application de la formule. Pour estimer l'incertitude-type, il faut remonter à la variabilité de y , qui est elle-même une conséquence de la variabilité des x_i .

Pour cela, il faut :

- ▷ Fixer un nombre N de simulations à réaliser ;
- ▷ Pour k entre 1 et N , réaliser
 - ▷ un tirage aléatoire pour chaque x_1 ;
 - ▷ utiliser les valeurs de ce tirage et la fonction f pour calculer une valeur y_k ;
 - ▷ sauvegarder cette valeur y_k ;
- ▷ l'incertitude-type de y est l'écart-type de la distribution des y_k . La moyenne des y_k permet de retrouver la valeur y .

Le choix de la distribution de probabilité de chaque x_i dépend de plusieurs facteurs expérimentaux. La modélisation de cette distribution peut être délicate. Par exemple, il n'est pas du tout naturel de prendre systématiquement une distribution gaussienne.

En règle général en CPGE, les x_i sont mesurés avec une précision. En dessous de cette précision, l'étudiant est incapable d'accéder à une information sur la distribution de probabilité. On privilégie donc la **distribution uniforme de probabilité**, cohérente avec l'expérience pratique de l'étudiant. Toute autre forme de distribution doit pouvoir être justifiée et argumentée par l'étudiant.

 **Attention !** Il ne faut pas oublier qu'en notant Δ la précision, l'incertitude-type qui caractérise la variabilité vaut $u = \Delta/\sqrt{3}$.

5.1.2 Exemples

À l'aide de python, on a simulé à l'aide d'une méthode Monte-Carlo les incertitudes composées de :

- ▷ une fréquence connaissant la période ;
- ▷ une longueur entre deux points connaissant leurs positions ;
- ▷ une célérité connaissant une fréquence et une longueur d'onde ;
- ▷ une célérité connaissant la période de l'onde et la position de deux nœuds séparant 10 longueurs d'ondes ;
- ▷ une distance focale connaissant les positions de l'objet et de l'image.

Tous ces exemples sont regroupés dans un [Google Colab disponible en cliquant ici](#).

5.2 Régression linéaire

5.2.1 Principe

En physique-chimie, nous n'avons jamais des séries parfaites de nombres, chaque mesure a une incertitude. Supposons que nous ayons réalisé m mesures de couples (x_i, y_i) , chacun avec une incertitude-type $(u(x_i), u(y_i))$. Ces incertitudes-types peuvent être différentes pour chaque mesure.

Pour en tenir compte, on réalise une simulation Monte-Carlo en réalisant un très grand nombre de régression linéaire sur une série de points sans incertitudes. Pour obtenir ces points, on génère aléatoirement pour chaque point mesuré une valeur à l'aide des incertitudes-type expérimentales. Conformément aux préconisations du GUM, si nous n'avons pas d'information pour savoir de quelle façon générer les valeurs, on choisit une distribution de probabilité uniforme (cf. section précédente). Attention, on rappelle que pour une distribution uniforme entre $x - \Delta$ et $x + \Delta$, on a la relation $\Delta = u(x) \times \sqrt{3}$.

Les valeurs finales de la pente et de l'ordonnée à l'origine sont les moyennes de toutes leurs valeurs, et leurs incertitudes-types sont les écarts-types de ces deux ensembles de valeurs.

On note m le nombre de points de mesures. Pour la simulation Monte-Carlo, il faut réaliser le programme ci-dessous décrit en pseudo-code :

- ▷ réaliser une régression linéaire unique pour estimer la pente et l'ordonnée à l'origine ;
- ▷ fixer un nombre N très grand ;
- ▷ créer deux listes vides pour stocker les pentes et les ordonnées à l'origine des régressions ;
- ▷ pour chaque i compris entre 1 et N , réaliser
 - ▷ pour chaque j compris entre 1 et m , réaliser un tirage aléatoire d'une valeur de Y_j donnée par une loi de probabilité uniforme entre $y_j - \sqrt{3} \times u(y_j)$ et $y_j + \sqrt{3} \times u(y_j)$;
 - ▷ pour chaque j compris entre 1 et m , réaliser un tirage aléatoire d'une valeur de X_j donnée par une loi de probabilité uniforme entre $x_j - \sqrt{3} \times u(x_j)$ et $x_j + \sqrt{3} \times u(x_j)$;
 - ▷ réaliser une régression linéaire sur cet ensemble (X_j, Y_j) puis ajouter dans les listes la pente et l'ordonnée à l'origine de cette régression.
- ▷ calculer pour les écarts-types des deux listes des pentes et des ordonnées à l'origine pour obtenir les incertitudes-types ;
- ▷ tracer sur un graphique la droite obtenue avec la pente moyenne et l'ordonnée à l'origine moyenne ;
- ▷ superposer sur le même graphique les points de mesures en indiquant leurs incertitudes-type sous la forme de barre d'erreur.

5.2.2 Exemple

Exercice rédigé avec Pierre Jamonneau.

Lorsqu'un métal est éclairé par un rayonnement ultraviolet ou proche ultraviolet, des électrons sont extraits du métal : c'est l'effet photoélectrique. On considère une plaque de baryum éclairée par une lampe spectrale au mercure. Un système de filtres permet de sélectionner une longueur d'onde particulière λ émise par la lampe. Un dispositif expérimental indépendant permet de mesurer l'énergie cinétique \mathcal{E}_c des électrons extraits de la plaque de baryum.

On récapitule ci-dessous les valeurs mesurées. L'incertitude-type de l'énergie cinétique est de 0.05 eV.

\mathcal{E}_c (eV)	2.40	1.69	0.91	0.57	0.35
ν ($\times 10^{14}$ Hz)	11.825	10.111	8.210	7.4129	6.8838
$u(\nu)$ ($\times 10^{12}$ Hz)	2.3	1.7	1.1	0.91	0.79

L'énergie cinétique des électrons extraits d'un métal éclairé par une onde électromagnétique de fréquence ν s'écrit :

$$\mathcal{E}_c = h(\nu - \nu_s) \quad (5.1)$$

où ν_s est une constante appelée fréquence seuil.

Le code python de la régression linéaire est disponible dans [un Google Colab en cliquant ici](#).

Par régression linéaire, on obtient $h = (6.63 \pm 0.20) \times 10^{-34}$ J · s et $\nu_s = (6.03 \pm 0.10) \times 10^{14}$ Hz.

Il est à noter que la fréquence de seuil doit être calculée en cours de simulation Monte-Carlo, et non pas à l'aide des valeurs finales de pente et d'ordonnée à l'origine moyenne. En effet, ce calcul en cours de simulation permet la prise en compte des corrélations entre la pente et l'ordonnée à l'origine. Dans cette expérience, on constate un facteur 3 entre les deux possibilités.

6 Annexe 2 : Exercices corrigés

Ces exercices sont de difficulté variable, mais ils sont du niveau de ce qui est attendu par un étudiant en CPGE dans le cadre des programmes de 2021. D'autres exercices sont disponibles dans un ouvrage édité par Vuibert.

Les calculs d'écart-types et de régression linéaire simples sont largement accessibles avec une calculatrice de type lycée ou avec l'application gratuite NumWorks™.

L'application de la méthode Monte-Carlo peut se faire avec un tableur ou avec python.

6.1 Précision de la verrerie en chimie

On souhaite comparer la qualité de prélèvement de 100 mL d'eau à l'aide d'un bécher, d'une éprouvette graduée et d'une fiole jaugée.

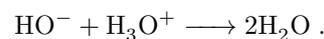
Pour cela, une cinquantaine de prélèvements ont été effectués avec chaque verrerie, puis la quantité d'eau prélevée a été pesée. Ainsi, en connaissant la masse volumique de l'eau, on est en capacité de mesurer précisément le volume de liquide prélevé.

	Moyenne	Écart-type	Nombre de prélèvements
Bécher	98.7 mL	1.6 mL	37
Éprouvette graduée	99.5 mL	0.6 mL	65
Fiole jaugée	100.1 mL	0.3 mL	49

1. Est-ce que ces informations permettent de savoir quel dispositif permet d'obtenir le volume de la plus proche de 100 mL lors d'un unique prélèvement ?
2. Quelle est l'incertitude-type associée à un prélèvement avec chaque récipient ?
3. En déduire la verrerie la plus raisonnable à utiliser pour espérer le prélèvement le plus reproductible ?

6.2 Précision de dosages acide-base

On souhaite comparer les dosages acide-base par colorimétrie et par suivi pH-métrique. Dans les deux cas, l'équation support de la réaction de dosage est la suivante :



Une solution de $V_1 = 100$ mL contenant les ions HO^- à la concentration $c_1 = 10^{-2}$ mol/L est dosée par une solution de chlorure d'hydrogène contenant les ions H_3O^+ à la concentration $c_2 = 10^{-1}$ mol/L.

1. Donner la valeur du volume d'équivalence théorique attendu.
2. Par une autre expérience, on a évalué une incertitude-type relative sur le volume V_0 de 0.3% et sur les concentrations préparées de 1%. En déduire l'incertitude-type du volume attendu dans les conditions de préparation de l'expérience.

Dix élèves réalisent chacun un dosage par suivi colorimétrique et un dosage par suivi pH-métrique. Leurs données expérimentales sont regroupées dans le tableau ci-dessous.

Groupe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
V_{eq} colorimétrique (en mL)	9,6	10,3	10,2	10,5	11,0	9,2	10,3	9,9	9,2	9,6
V_{eq} pH-métrique (en mL)	10,1	10,0	9,7	9,7	9,7	10,0	10,2	9,9	9,8	10,3

3. Quel dosage a la plus faible incertitude-type ?
4. En utilisant les données de chaque type de dosage, quels sont les deux résultats finaux de chaque dosage ?
5. Ces résultats sont-ils compatibles avec la valeur théorique ?

6.3 Mesure d'absorbance pour déterminer une concentration inconnue

On souhaite connaître la quantité de colorant alimentaire E131 dans un bonbon gélifié.

Pour cela, on souhaite mesurer l'absorbance d'une solution dans laquelle le bonbon aura été dissout. Pour cela, on prépare cinq solutions étalonnées en concentration de E131. La préparation de ces solutions implique une pesée du colorant solide, une dissolution, un prélèvement puis une dilution.

La mesure au spectromètre est réalisée à $\lambda = 640$ nm, la longueur d'onde présentant le maximum d'absorbance. L'incertitude-type relative d'une mesure du spectromètre est de 2%.

Un premier groupe d'élèves prépare les solutions et mesure les valeurs suivantes.

c (en mol/L)	2×10^{-5}	1.5×10^{-5}	1×10^{-5}	5×10^{-6}	2×10^{-6}
$A_{640\text{nm}}$	1.719	1.372	0.768	0.442	0.201

On rappelle que la loi de Beer-Lambert implique, aux faibles concentrations, la relation $A = kc$ avec k une constante.

6.3.1 Détermination de la concentration pour un groupe d'élève

- Déterminer une valeur de k ainsi que son incertitude-type sur une mesure unique.
- Un bonbon gélifié est entièrement dissous dans 50 mL d'eau (d'incertitude-type relative de 0.3%), l'absorbance mesurée de cette solution est de 0.778. En déduire la concentration de la solution ainsi que son incertitude-type.
- La masse molaire du E131 est de $M = 582.66$ g/mol et est d'incertitude-type négligeable. En déduire la masse de colorant dans le bonbon ainsi que son incertitude-type.

6.3.2 Utilisation d'une droite d'étalonnage

Plutôt que de réaliser un traitement statistique sur les données étalonnées, on souhaite utiliser une droite d'étalonnage.

- Déterminer la valeur de k à l'aide d'une régression linéaire.
- L'absorbance de la solution inconnue est toujours de 0.778, en déduire la valeur de la masse de colorant dans le bonbon.

Pour estimer l'incertitude-type de cette mesure, on utilise les valeurs mesurées de 9 autres groupes d'élèves, regroupées dans le tableau ci-dessous.

Groupe	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m (en μg)	230	178	261	206	198	206	260	186	195

- Estimer l'incertitude-type sur la masse de colorant dans le bonbon en suivant ce protocole pour une mesure unique.
- Pour gagner en précision, on prend la moyenne des réalisations pour estimer la masse. Estimer la masse et son incertitude-type en suivant cette méthode.
- Les deux valeurs trouvées sont-elles compatibles?
- Discuter les écarts d'incertitudes-types entre les expériences.

6.4 Mesures de la vitesse du son à l'aide d'ultrasons

On se propose de mesurer la fréquence et la célérité dans l'air des ultrasons produits en utilisant deux propriétés différentes du son. L'étude de la célérité de l'onde est importante, puisque sa connaissance permet de mesurer des distances (à partir de mesures de temps). Cette célérité dépend du milieu dans lequel se propage l'onde.

L'émetteur d'ultrasons est alimenté par une source de tension continue de 15 V. Il peut émettre soit un signal continu (signal sinusoïdal permanent), soit un signal en salves (signal intermittent). Un commutateur permet de sélectionner l'un ou l'autre de ces signaux.

Un récepteur ultrasonore transforme l'onde ultrasonore, à l'endroit où il est situé, en une tension électrique de même fréquence et d'amplitude proportionnelle à celle de l'onde. Les récepteurs sont donc connectés aux entrées d'un oscilloscope afin de visualiser les signaux.

L'émetteur et les récepteurs sont placés sur un banc acoustique gradué permettant de relever leur position.

6.4.1 Mesure par temps de vol

Les deux récepteurs sont tous deux reliés à l'oscilloscope numérique ce qui permet de mesurer le temps de vol de la salve entre les deux récepteurs.

Variabilité de la mesure unique

- Au cours d'une première mesure, un premier groupe d'élèves mesure un temps de vol de 0.59 ms pour des émetteurs séparés de 20 cm. En déduire la valeur calculée de la célérité du son.
Pour estimer son incertitude-type, la mesure a été reproduite 9 fois de plus.

d (en cm)	10	13	17	22	26	30	33	37	40
τ (en ms)	0.27	0.38	0.50	0.66	0.73	0.90	0.96	1.09	1.15

Tab. 1 – Mesures du temps de vol des ultrasons pour différentes distances entre récepteurs.

- Tracer l'histogramme de distribution des 10 valeurs de vitesse.
- Calculer l'incertitude-type du processus de mesure.

Variabilité de la valeur moyenne

4. Calculer la valeur moyenne de la célérité obtenue par le premier groupe d'élèves.

Pour estimer l'incertitude-type de cette mesure, les onze groupes d'élèves ont mis en commun leur mesure de moyenne effectuée sur 10 mesures individuelles.

Groupe	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
c_{moy} (en m/s)	343.8	339.2	343.0	343.9	340.5	335.8	344.3	341.0	346.5	337.9

Tab. 2 – Mesures de la vitesse du son moyenne sur 10 mesures pour 10 autres groupes d'élèves.

5. En déduire l'incertitude-type expérimentale sur la moyenne de la célérité.

6. Comparer cette valeur expérimentale au résultat de la formule théorique fournie dans le cours.

6.4.2 Mesure par aspect ondulatoire

L'émetteur fonctionne cette fois en mode continu. Les deux récepteurs sont tous deux reliés à l'oscilloscope numérique.

Mesure de la longueur d'onde

Un des récepteurs est maintenu fixe et tandis que le second se déplace sur le rail. On observe le signal périodique du second récepteur se déplacer sur l'écran de l'oscilloscope. Lorsque les deux récepteurs sont côte à côte, on observe la superposition des signaux.

On peut montrer que les signaux coïncident lorsqu'ils sont décalés spatialement d'un multiple entier de la longueur d'onde λ .

On déplace donc lentement le second récepteur en comptant le nombre de coïncidences des signaux. Lorsque 10 coïncidences sont passées, on constate que le second récepteur est à la position 28.6 cm tandis que le premier est toujours à la position 20.2 cm.

1. Estimer à l'aide de la formule du cours l'incertitude-type sur la position d'un détecteur.
2. Estimer la distance séparant les détecteurs et en déduire avec la formule du cours son incertitude-type.
3. En déduire une valeur de la longueur d'onde λ et de son incertitude-type.

Mesure de la fréquence

On mesure sur l'oscilloscope la période d'un des signaux. On trouve $T = 24.4 \mu\text{s}$. Le calibre choisi dans la base temporelle de l'oscilloscope permet une mesure précise à $0.1 \mu\text{s}$ près.

4. En déduire l'incertitude-type sur la période.
5. Calculer la fréquence $\nu = 1/T$ correspondante du signal et, à l'aide d'une simulation Monte-Carlo, en déduire l'incertitude-type sur cette fréquence.

Mesure de la célérité

6. Calculer la célérité du son en utilisant la relation $c = \lambda\nu$ et estimer son incertitude-type à l'aide de la formule du cours.
7. Les deux mesures de célérité sont-elles compatibles entre elles ?

6.5 Détermination de la valeur d'une capacité

Lors d'une séance de travaux pratiques, des élèves ont réalisé le circuit suivant de la charge d'un condensateur. À

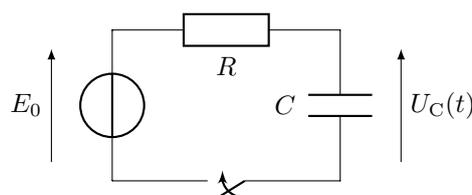


Fig. 4 – Schéma électrique de la charge du condensateur.

l'aide d'un logiciel, ils ont réalisé un ajustement exponentiel de la tension $U_C(t)$ dans le but de mesurer la constante de temps τ . Une étiquette sur le condensateur utilisé indique $1.00 \mu\text{F}$. Le tableau ci-dessous regroupe leurs données pour différentes valeurs de la résistance R .

R (en Ω)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
τ (en ms)	151	240	356	458	547	651	741	843	949	1041

Tab. 3 – Mesures de la constante de temps τ pour différentes résistances.

La résistance R est mesurée avec une incertitude-type relative de 2% tandis que la constante de temps est donnée par le logiciel avec une incertitude-type relative de 4%.

On rappelle que théoriquement, la constante de temps est définie par $\tau = RC$ avec R la résistance totale du circuit.

6.5.1 Traitement statistique des données

1. Calculer $C = \tau/R$ pour toutes les données. En déduire une valeur moyenne de C ainsi que son incertitude-type.
2. Conclure sur la compatibilité entre la mesure et la valeur affichée sur le condensateur.

6.5.2 Utilisation de la régression linéaire

3. Tracer τ en fonction de R , que constatez vous ? Qu'en déduisez vous sur le modèle proposé.
4. Réaliser une régression linéaire à l'aide d'une simulation Monte-Carlo pour en déduire les paramètres du modèle ainsi que leurs incertitudes-type.
5. Conclure sur les valeurs mesurées.

6.6 Calorimétrie avec pertes thermiques

Exercice rédigé avec Adrien Licari. Exercice significativement plus difficile qui nécessite python.

On considère un calorimètre de capacité thermique totale C rempli d'une masse $m_{\text{eau}} = 764$ g d'eau et contenant une résistance chauffante. On apporte à la puissance \mathcal{P} sous forme d'effet Joule. L'évolution de la température est décrite théoriquement par l'équation différentielle suivante

$$\frac{dT}{dt} + \frac{1}{RC}T = \frac{1}{RC}T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}}{C}.$$

On cherche à déterminer la résistance thermique R et la capacité thermique totale C du système en étudiant expérimentalement une phase de chauffage. La puissance apportée est mesurée au Wattmètre et vaut $\mathcal{P} = 325$ W. La température extérieure vaut $T_{\text{ext}} = 14$ °C.

Les données sont à télécharger sur le site www.mchampion.fr ou disponibles directement sur un [Google Colab en cliquant ici](#).

1. Montrer que l'on peut obtenir τ , C et donc R si on peut tracer $\frac{dT}{dt} = f(T_{\text{ext}} - T)$.
2. Importer les données dans un script Python et tracer T en fonction du temps t .
3. À l'aide d'une estimation numérique de la dérivée, écrire une fonction `extraire_pente` qui prend en paramètre les tableaux des dates et des températures mesurées et renvoie $(T_{\text{ext}} - T)$ et $\frac{dT}{dt}$. En utilisant cette fonction, tracer $\frac{dT}{dt}$ en fonction de $(T_{\text{ext}} - T)$ pour le jeu de données fourni. Pensez-vous que ce jeu de données soit exploitable pour une régression linéaire ?
Afin d'améliorer le traitement des données, on se propose de lisser la courbe de température.
4. Écrire une fonction `lissage` qui prend en paramètres les températures mesurées et un nombre de points, et qui renvoie un tableau de valeurs \bar{T} où chaque point est la moyenne des $n = 20$ points les plus proches ($n/2$ précédents et $n/2$ suivants).
5. Utiliser cette fonction pour refaire l'estimation numérique de la dérivée en chaque point et afficher les courbes $\bar{T} = f(t)$ et $\frac{d\bar{T}}{dt} = f(T_{\text{ext}} - \bar{T})$; a-t-on résolu le problème précédent ?
6. Écrire une fonction `mesureRC` qui prend alors en paramètre les dates, les températures, la puissance de chauffe et le nombre de points de lissages et
 - ▷ lisse les données;
 - ▷ en déduit $\frac{d\bar{T}}{dt}$ et $(T_{\text{ext}} - \bar{T})$;
 - ▷ effectue la régression linéaire de $\frac{d\bar{T}}{dt} = f(T_{\text{ext}} - \bar{T})$;
 - ▷ en déduit et renvoie R et C .

L'utiliser pour calculer R et C à partir des données fournies.

- Le constructeur donne pour l'incertitude de la mesure de température 0.3°C et pour le temps 1 ms ; on donne également une incertitude sur la puissance de chauffe \mathcal{P} de 5 W . Par une méthode de type Monte-Carlo, générer un ensemble de données (t, T) à partir de celles fournies et en déduire l'incertitude-type $u(R)$ et $u(C)$.
- Plusieurs expérimentateurs font la même expérience, et on obtient l'ensemble de mesures suivantes :

Mesure	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$C[\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1}]$	3.60	3.52	3.31	3.55	3.46	3.29	3.63	3.62	3.11	3.27
$R[\text{K} \cdot \text{W}^{-1}]$	0.34	0.67	0.59	0.75	0.93	0.85	0.59	0.77	0.24	0.41

En déduire une estimation de C et R avec leurs incertitudes-types. Que pensez-vous de la mesure 9 ?

6.7 Corrigés

Remarque personnelle de l'auteur : Les corrigés sont rédigés avec des incertitudes-types à deux chiffres significatifs. Ce choix est plus judicieux pour éviter les problèmes de troncatures et d'arrondis. Par exemple 15 doit-il être arrondi à 10 ou à 20 si l'on conserve un seul chiffre significatif ? De plus, le nombre de chiffres significatifs est une question d'usage et d'esthétique plus qu'un problème théorique fondamental.

6.7.1 Précision de la verrerie en chimie

- Sur un prélèvement unique, on ne peut pas savoir quel sera le prélèvement le plus précis. En effet, à cause de la variabilité du prélèvement, il est possible de réaliser une fois un meilleur prélèvement avec un bécher qu'avec une fiole jaugée !
- L'incertitude-type est simplement l'écart-type de la distribution. Le nombre de prélèvements n'a aucune utilité ici, on cherche en effet à estimer l'incertitude-type d'une mesure unique et non pas celle de la moyenne.
- Toutefois, la fiole jaugée à l'écart-type le plus faible. Ainsi, il est raisonnable d'espérer un meilleur prélèvement avec un tel dispositif car, en moyenne, le prélèvement est plus proche du volume attendu.

6.7.2 Précision de dosages acide-base

- L'équivalence a lieu lorsque les réactifs sont introduits en proportion stœchiométriques, soit $V_1 c_1 = V_{\text{eq, théo}} c_2$ d'où $V_{\text{eq, théo}} = V_1 c_1 / c_2 = 10\text{ mL}$.
- On applique la formule des incertitudes-composées de type produit, soit

$$\frac{u(V_{\text{eq, théo}})}{V_{\text{eq, théo}}} = \sqrt{\left(\frac{u(V_1)}{V_1}\right)^2 + \left(\frac{u(c_1)}{c_1}\right)^2 + \left(\frac{u(c_2)}{c_2}\right)^2} = \sqrt{0.003^2 + 2 \times 0.01^2} = 1.4\%$$

soit $V_{\text{eq, théo}} = (10.00 \pm 0.14)\text{ mL}$.

- On calcule l'écart-type des deux distributions pour estimer les incertitudes-type. Pour le dosage colorimétrique, on trouve $u(V_{\text{eq, col}}) = 0.58\text{ mL}$. Pour le dosage pH-métrique, on trouve $u(V_{\text{eq, pH}}) = 0.22\text{ mL}$. Le dosage pH-métrique a donc une variabilité plus faible. Il a donc une probabilité plus forte de trouver une valeur plus proche de la valeur théorique.
- Pour avoir la valeur finale, on prend la moyenne et on trouve l'incertitude-type de la moyenne en divisant l'incertitude-type sur une mesure par $\sqrt{10}$. Il vient pour le dosage colorimétrique $V_{\text{eq, col}} = (9.98 \pm 0.18)\text{ mL}$ et pour le dosage pH-métrique $V_{\text{eq, pH}} = (9.94 \pm 0.07)\text{ mL}$.
- Pour comparer avec la valeur attendue, on calcule l'écart normalisé, on trouve $E_{N, \text{col}} = 0.09$ et $E_{N, \text{pH}} = 0.38$. Dans les deux cas, ce nombre est inférieur à 2. Les dosages sont compatibles avec la valeur attendue.

6.7.3 Mesure d'absorbance pour déterminer une concentration inconnue

- Prenons la première valeur, il vient $k = 8.60 \times 10^4\text{ L/mol}$. Pour déterminer l'incertitude-type, calculons l'écart-type de l'ensemble des k . Il vient $u(k) = 0.77 \times 10^4\text{ L/mol}$.
- On a $c = A/k$ qui est calculée avec le k de la question précédente. On estime l'incertitude-type à l'aide de la formule des incertitudes composées de type produit, soit

$$\frac{u(c)}{c} = \sqrt{\left(\frac{u(k)}{k}\right)^2 + \left(\frac{u(A)}{A}\right)^2} \approx 8.9\%$$

ce qui était prévisible car l'incertitude-type relative sur A est négligeable devant celle sur k . Il vient donc $c = (9.05 \pm 0.81) \times 10^{-6}\text{ mol/L}$.

3. Par définition, on a $m = McV$. Il vient donc $m = (263 \pm 23) \mu\text{g}$. En effet, au vu de la formule de composition des incertitudes-types de type produit, on constate que les incertitudes-types relatives de M et de V sont négligeables devant celle sur c .
4. On réalise une régression linéaire entre c et A , par exemple avec une calculatrice réalisant des traitements statistiques ou sous python avec la commande `numpy.polyfit(A,c,1)` de la bibliothèque `numpy`, la pente étant le premier paramètre de la réponse de cette fonction (le second étant l'ordonnée à l'origine qui est très proche de 0 comme prévu). On trouve $k = 8.645\,028\,14 \times 10^4 \text{ L/mol}$. Il n'est pas possible d'estimer l'incertitude sur cette pente car nous n'avons pas de moyen d'estimer précisément l'incertitude-type sur chaque concentration. C'est de plus inutile car la variabilité totale de l'expérience (régression linéaire incluse) sera estimée via un traitement statistique à la fin de l'expérience.
5. On trouve, toujours sans incertitudes, $m = 262.516\,288 \mu\text{g}$. On note que cette valeur est heureusement cohérente avec la valeur et l'incertitude-type trouvée dans l'expérience précédente.
6. On calcule l'écart-type de la distribution sur les 10 masses disponibles, et on trouve une incertitude-type sur une mesure unique. On trouve donc $u(m) = 31 \mu\text{g}$.
7. On divise l'incertitude-type précédente par $\sqrt{10}$ et on prend la moyenne des masses trouvées, il vient donc la valeur $m = (218 \pm 10) \mu\text{g}$.
8. On calcule l'écart normalisé entre les deux valeurs selon les deux protocoles, et on trouve une valeur $E_N \approx 1.1$. Cette valeur est inférieure à 2, les deux mesures sont compatibles.
9. On constate que les incertitudes sur les mesures uniques (par régression linéaire ou par traitement statistique) sont différentes. En effet, ces deux expériences ne sont pas identiques. La première consiste à étudier la variabilité d'une mesure d'un groupe précis utilisant un spectromètre, tandis que la seconde étudie la variabilité d'une mesure réalisée par un groupe dans une classe utilisant un spectromètre quelconque parmi une collection. Il est donc naturel que la variabilité de la seconde mesure soit plus importante. Ensuite, la dernière mesure a une incertitude-type bien plus faible, car la prise de la moyenne réduit fortement la variabilité de l'expérience. Cette opération est évidemment impossible en étudiant uniquement la mesure d'un groupe.

6.7.4 Mesures de la vitesse du son à l'aide d'ultrasons

Mesure par temps de vol

1. On a $c = d/\tau = 339.0 \text{ m/s}$.
2. On calcule pour l'ensemble des valeurs expérimentales les valeurs de c que l'on trace sous forme d'histogramme à l'aide de python par exemple.

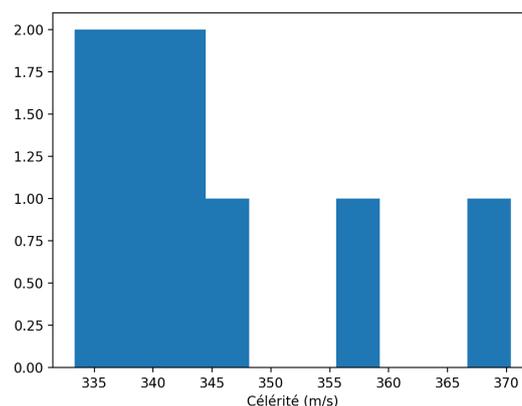
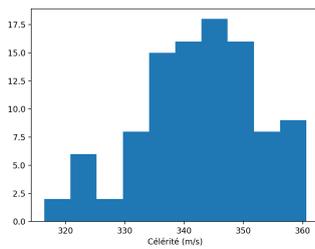


Fig. 5 – Distribution des dix valeurs expérimentales de vitesse

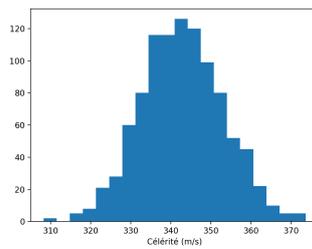
Complément : vers la distribution gaussienne

Remarque personnelle de l'auteur : C'est le seul endroit où il me semble naturel de parler de distribution gaussienne. Sinon, l'introduction de cette distribution n'est pas évidente pour un étudiant moyen. Autrement dit, au niveau CPGE, je considère qu'il n'est ni nécessaire, ni aisé grâce aux observations expérimentales, d'introduire des gaussiennes pour simuler un processus aléatoire.

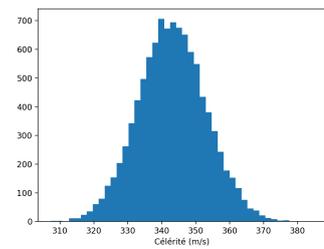
Imaginons que nous soyons capable de reproduire cette expérience un très grand nombre de fois. Voici à quoi pourraient ressembler les courbes pour 100, 1 000 et 10 000 expériences.



(a) Simulation de 100 expériences.



(b) Simulation de 1 000 expériences.



(c) Simulation de 10 000 expériences.

Fig. 6 – Vers la gaussienne...

La courbe de la figure 6c est celle qui s'approche le plus d'une distribution lisse, appelée distribution gaussienne. Cette courbe « en cloche » est caractéristique de très nombreux processus de mesure. Le fait que la distribution aléatoire tende vers une courbe gaussienne est un résultat qui se retrouve souvent en physique. Pour ces trois simulations, on trouve une valeur moyenne autour de $c_m = 343$ m/s et un écart-type de $u(c) = 10$ m/s. Le résultat de la mesure est la donnée de ces deux grandeurs.

On peut montrer que, pour une distribution gaussienne, environ 68% des résultats du processus de mesure sont comprises entre $c_m - u(c)$ et $c_m + u(c)$ et 95% sont comprises entre $c_m - 2u(c)$ et $c_m + 2u(c)$.

- Sur cette distribution, on calcule l'écart-type et on trouve $u(c) = 11$ m/s. Ainsi, dans notre cas, la mesure unique effectuée est donc $c = (339 \pm 11)$ m/s.
- La valeur moyenne de la distribution du groupe 1 vaut $c_{\text{moy}} = 344.5$ m/s (on rajoute des chiffres significatifs par rapport à la question précédente car nous n'avons pas encore évalué l'incertitude-type).
- On calcule l'écart-type des 10 différentes valeurs moyennes observées par les différents groupes, et on trouve $u(c_{\text{moy}}) = 3.3$ m/s. La valeur finale trouvée par moyenne est donc $c_{\text{moy}} = (344.5 \pm 3.3)$ m/s.
- On applique la formule du cours, à savoir $u(c_{\text{moy}}) = u(c)/\sqrt{N}$. Dans notre cas, il y a $N = 10$ mesures individuelles de vitesses, soit $u(c_{\text{moy}}) = 3.6$ m/s. Les deux valeurs sont très proches, et on suppose qu'en élargissant le nombre de mesures et de groupes, on se rapprocherait encore plus de la valeur théorique. À notre niveau donc, lorsque ce n'est pas possible de réaliser une étude statistique sur les moyennes, on pourra utiliser directement la formule théorique.

Mesure par aspect ondulatoire

- La règle graduée est précise au millimètre. Cela implique qu'une mesure annoncée à 28.6 cm est en fait supposée être comprise entre 28.55 cm et 28.65 cm. L'incertitude-type est alors par définition $0.5 \text{ mm}/\sqrt{3} \approx 0.29$ mm. Ainsi, la mesure est (28.600 ± 0.029) cm.
- On a la distance entre les deux détecteurs $D = d_2 - d_1 = 8.40$ cm. Pour estimer l'incertitude-type, on applique la formule d'incertitudes composées de type somme, soit

$$u(D) = \sqrt{u(d_2)^2 + u(d_1)^2} = \sqrt{2}u(d) \approx 0.41 \text{ mm}$$

car les incertitudes de mesure sont identiques pour chaque récepteur. On a donc $D = (8.400 \pm 0.041)$ cm.

- Par la mesure, on a $D = 10\lambda$. On en déduit donc $\lambda = D/10$. La variabilité de λ est donc 10 fois plus faible que celle de D , on a donc aussi $u(\lambda) = u(D)/10$. Ce résultat se retrouve par les formules du cours de type produit. Il vient donc $\lambda = (0.8400 \pm 0.0041)$ cm. Il est à noter que si on avait calculé une seule longueur d'onde, l'incertitude-type aurait été dix fois plus importante. Mesurer plusieurs répétition d'un phénomène périodique permet de diminuer significativement l'incertitude par rapport à la mesure directe d'une seule périodicité.
- L'incertitude-type est directement estimée à l'aide de la formule $\Delta/\sqrt{3}$, soit ici $u(T) = 0.057$ μs .
- Pour estimer l'incertitude-type sur la fréquence, nous devons utiliser une simulation Monte-Carlo. Pour cela, nous allons simuler aléatoirement à l'aide d'une distribution uniforme un grand nombre de fois une valeur d'une période. Puis nous calculerons l'inverse de chacune de ces périodes et nous prendrons enfin l'écart-type de cet ensemble. Un corrigé python est disponible sous forme [de Google Colab en cliquant ici](#).
On trouve alors $\nu = (40983 \pm 97)$ Hz.

Remarque personnelle de l'auteur : Pour une relation $y = f(x)$, la formule $u(y) = |f'(x)|u(x)$ n'est pas au programme. Toutefois, on la retrouve directement dans l'exemple traité. Pour ma part, je demande à mes étudiants de la connaître.

6. On en déduit la valeur de la célérité ainsi que son incertitude-type à l'aide de la formule de composition des incertitudes de type produit. On a $u(c) = c \sqrt{\left(\frac{u(\lambda)}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{u(\nu)}{\nu}\right)^2}$ où on prend $c = \lambda\nu$.

Il vient directement $c = (344.4 \pm 1.8) \text{ m/s}$.

7. Pour comparer les deux valeurs de célérité, on calcule l'écart normalisé entre les deux valeurs, soit

$$E_N = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{u(c_1)^2 + u(c_2)^2}} \approx 0.03 .$$

Deux valeurs sont compatibles entre elles si leur écart normalisé est inférieur à 2, cette condition est largement vérifiée dans ce cas.

6.7.5 Détermination de la valeur d'une capacité

Un corrigé python est disponible sous forme de Google Colab en [Google Colab en cliquant ici](#).

1. On trouve $C = (1.143 \pm 0.045) \mu\text{F}$ où l'incertitude-type est l'écart-type de la distribution divisé par $\sqrt{10}$.
2. La valeur affichée n'ayant pas d'incertitudes, on calcule le nombre d'écart-type séparant la valeur affichée et la valeur mesurée à l'aide de l'écart normalisé. On trouve $\frac{|C_a - C_m|}{u(C_m)} \approx 3.20$. Les deux valeurs sont incompatibles, la mesure étant le résultat d'une moyenne, sa variabilité n'est pas à remettre en cause. Ainsi, soit la valeur affichée est fautive, ce qui est rarement le cas à ce point, soit la modélisation physique pose problème.
3. On observe la courbe figure 7. On constate que les points sont bien alignés et donc qu'un modèle linéaire semble raisonnable. Toutefois, il semble qu'une régression linéaire ne passera pas par l'origine du graphe, un modèle du type $\tau = RC + \tau_0$ semblerait pertinent.

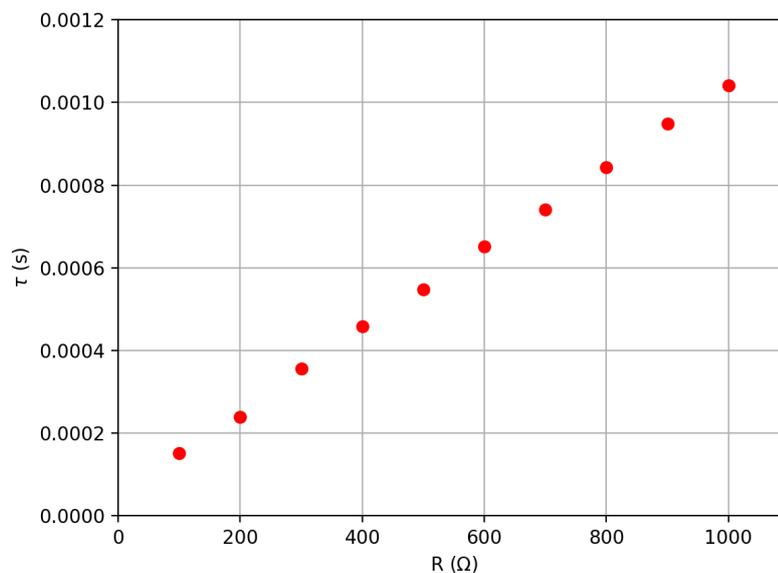


Fig. 7 – Tracé de τ en fonction de R .

4. Conformément aux préconisations du GUM, comme nous n'avons pas d'information pour savoir de quelle façon générer les valeurs, on choisit une distribution de probabilité uniforme qui permet de ne pas sous-estimer l'incertitude. Attention, on rappelle que pour une distribution uniforme entre $x - \Delta$ et $x + \Delta$, on a la relation $\Delta = u(x) \times \sqrt{3}$. On trouve dans le cas qui nous intéresse la courbe 8. Le résultat donne $C = (0.992 \pm 0.034) \mu\text{F}$ et $\tau_0 = (52 \pm 14) \text{ ms}$. La courbe de tendance passe suffisamment proche des barres d'incertitudes, la régression linéaire est validée. On rappelle que les barres d'incertitudes représentent les incertitudes-types qui sont la valeur typique de la variabilité de la mesure. Ainsi, deux valeurs séparées de quelques valeurs de l'incertitude-type sont compatibles, et donc il n'est pas nécessaire que la droite de tendance passe par toutes les barres d'incertitudes.
5. Cette fois, l'écart normalisé entre la valeur mesurée et la valeur attendue est seulement de 0.23, les deux valeurs sont clairement compatibles.

Ce modèle affine implique l'existence d'une résistance interne, de la forme $\tau = (R + R_{\text{int}})C$. Pour estimer la résistance, on calcule l'ensemble des valeurs R_i issues de la simulation pour on calcule l'écart-type. Il est nécessaire

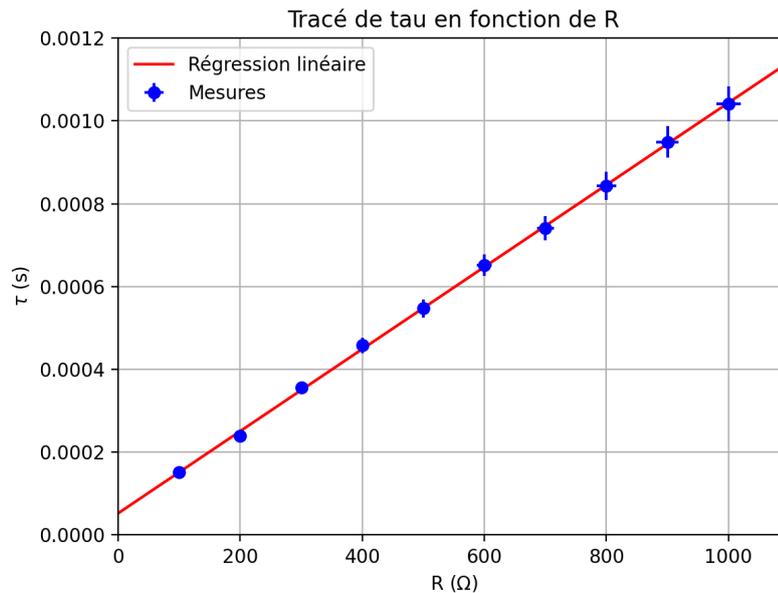


Fig. 8 – Tracé de τ en fonction de R .

de prendre en compte toutes les mesures issues de Monte-Carlo pour tenir compte des corrélations entre la pente et l'ordonnée à l'origine de la régression linéaire. Il vient $R_i = (54 \pm 16) \Omega$.

Cela permet d'affiner la modélisation de l'expérience. En effet, cette valeur est compatible avec la valeur typique de 50Ω de la résistance interne du générateur R_{int} qu'il faut ajouter à la résistance R pour obtenir la résistance totale du circuit. La modélisation $\tau = (R + R_{\text{int}})C$ est meilleure que simplement RC pour décrire les données expérimentales. Dans ce cas, la résistance interne n'est pas négligeable.

6.7.6 Calorimétrie avec pertes thermiques

Un corrigé python est disponible sous forme de Google Colab en [Google Colab en cliquant ici](#).

1. On réécrit l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T_{\text{ext}} - T}{\tau} + \frac{\mathcal{P}}{C}$$

ce qui montre que, si on peut tracer $\frac{dT}{dt} = f(T_{\text{ext}} - T)$ avec des données expérimentales, on pourra effectuer une régression linéaire $\frac{dT}{dt} = a(T_{\text{ext}} - T) + b$ et obtenir $\tau = \frac{1}{a}$, $C = \frac{\mathcal{P}}{b}$ et $R = \frac{\tau}{C} = \frac{b}{a\mathcal{P}}$.

2. Pour tout cette partie, le code corrigé se trouve dans le Google Colab.
3. On effectue l'estimation numérique de la dérivée par la limite moyenne (on perd donc les deux points extrêmes). Le graphe fait apparaître des données très bruitées : on ne voit aucune tendance se dégager du nuage de point. Il n'est donc pas envisageable de faire un traitement de régression linéaire.
4. Voir le code de correction.
5. On constate que le graphe $\bar{T} = f(t)$ est moins bruité, et de façon cohérente, le graphe $\frac{d\bar{T}}{dt} = f(T_{\text{ext}} - \bar{T})$ permet cette fois de dégager une tendance linéaire : il semble bien plus légitime de faire une régression linéaire sur ces données lissées.
6. La fonction écrite renvoie $R = 0.57 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ et $C = 3.28 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$.
7. L'énoncé ne précisant pas la nature des précisions de mesure données, on utilise une distribution uniforme pour simuler la variabilité. Le traitement est détaillé dans le fichier de correction ; on génère les jeux de données en faisant fluctuer les valeurs expérimentales. On obtient finalement (sur un tirage de 1000 jeux de données aléatoires) $C = (3.416 \pm 0.051) \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$ et $R = (0.573 \pm 0.015) \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$.
8. On effectue un calcul d'incertitude u/\sqrt{N} en s'appuyant sur le tableau proposé et en ajoutant la mesure précédente ; on obtient $R = (0.610 \pm 0.060) \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ et $C = (3.436 \pm 0.054) \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$. Ce sont des variabilités expérimentales

de mesure très différentes (respectivement 10 et 1.6 %), mais on constate une bien meilleure mesure de C , ce qui est important pour l'usage du calorimètre. Cette méthode plus complexe améliore donc réellement la mesure.

On constate cependant (sans l'opération de moyenne) que $u(C) = 0.17 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$ et $u(R) = 0.20 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$: les incertitudes obtenues ici sont différentes de celles obtenues par une seule opération à la question précédente ; en admettant que la mesure de température soit fidèle à la réalité, on en déduit que l'on observe ici la variation des paramètres d'un calorimètre à l'autre.

La mesure 9 pose problème : en effet la seule capacité thermique de l'eau (sans compter le calorimètre et la résistance) est $m_{\text{eau}}c_{\text{eau}} = 3.19 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$: la capacité thermique totale ne peut donc pas être inférieure, or la mesure 9 annonce $3.11 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$.